Kdo du 24/09/2025

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi^3 = 0$ et $\varphi^2 \neq 0$. (On a noté $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ et $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$.)

1. Montrer qu'il existe un vecteur u_0 tel que la famille $(u_0, \varphi(u_0), \varphi^2(u_0))$ est une base de E.
2. Ecrire la matrice de φ dans cette base.
3. En déduire qu'un endomorphisme commute avec φ si, et seulement si, il est de la forme $\alpha\, \mathrm{id}_E + \beta\, \varphi + \gamma\, \varphi^2$ où $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.
4. Déterminer tous les endomorphismes de $\mathbb{K}_2[X]$ qui commutent avec

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P'. \end{array}$$

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 3

et un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$

tel que $\varphi^3 = 0$, $\varphi^2 \neq 0$ La virgule se lit "tel que" slt après le symbole $\exists$.

x

x Hyp

~~Soit $u_0 \in E$~~ tel que ~~$\varphi^2(u_0) \neq 0$~~

$\exists u_0 \in E,\ \varphi^2(u_0) \neq 0$ car $\underline{\varphi^2 \neq 0}$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}$

Suposons $\lambda_1 u_0 + \lambda_2 \varphi(u_0) + \lambda_3 \varphi^2(u_0) = 0$

Allors $\lambda_1 \varphi^2 u_0 + \lambda_2 \varphi^3 u_0 + \lambda_3 \varphi^4 u_0 = \varphi^2 0$

d'où $\lambda_1 = 0$ car $\varphi^2(u_0) \neq 0$

Allors $\lambda_2 \varphi^2(u_0) + \lambda_3 \varphi^3(u_0) = \varphi(0)$

d'où $\lambda_2 = 0$

Allors $\lambda_3 \varphi^2(u_0) = 0$

d'où $\lambda_3 = 0$

Donc la famille $(u_0, \varphi(u_0), \varphi^2(u_0))$ de E est libre

Or $\dim E = 3$

Donc $\boxed{(u_0, \varphi(u_0), \varphi^2(u_0)) \text{ une base de } E}$

On la note $\mathcal{B}$

la matrice de φ dans β est $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Soit $C \in M_3(\mathbb{K})$

tel que $C = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$

$$MC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & d & g \\ b & e & h \end{bmatrix}$$

$$CM = \begin{bmatrix} d & g & 0 \\ e & h & 0 \\ f & i & 0 \end{bmatrix}$$

d'où les matrices C et M commutent

ssi $g = 0$ et $d = 0$ et ~~$b = 0$~~, ~~$b = f$~~, $h = 0$

et $i = e = a$

et $b = f$

~~d'où s'il commute~~

Rédac

ssi $C = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$,

Or $M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

donc

$$\boxed{\text{les matrices } C \text{ et } M \text{ commutent} \iff C = \alpha I_3 + \beta M + \gamma M^2 \quad \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3,}$$

d'où un endomorphisme f commute avec φ ssi ~~il est de la forme~~ $f = \alpha\, id_E + \beta\varphi + \gamma\varphi^2$ $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$,

4. On pose l'endomorphisme $f : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}_2[X]$, $P \longmapsto P'$

Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ où $P(X) = a + bX + cX^2$

alors $f^3(P(X)) = f^2(b + 2cX)$
$= f(2c)$
$= 0$

d'où $\boxed{f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}}$

Et $f^2(X^2) = 2 \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ d'où $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

d'où d'après 3., Soit $g \in \mathcal{L}(E)$

$\boxed{g \circ f = f \circ g \iff g \in \{\alpha id_E + \beta f + \gamma f^2 \in \mathcal{L}(E) \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}}$

Oui

ou $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3,\ g = \alpha id_E + \beta f + \gamma f^2$