

## Colle 02 Algèbre linéaire

BRANDAO Joao

**Exercice 1.** On note  $U_0 = 1$  et pour  $p \geq 1$

$$U_p = \frac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}, \quad p \in \mathbb{N}, \text{ et } \Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

1. Démontrer que la famille  $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$ .
2. Calculer  $\Delta^n(U_p)$ .
3. En déduire que :  $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$ , on a  $P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$ .
4. Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Démontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}, \text{ on a } P(n) \in \mathbb{Z}) \iff (\text{les coordonnées de } P \text{ dans la base } (U_p) \text{ sont entières}).$$

5. Soit  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  une fonction quelconque. Démontrer que  $f$  est polynomiale si et seulement si :  
 $\exists n \in \mathbb{N}$  tq  $\Delta^n(f) = 0$ .

**Solution 1.**

1. La famille  $(U_p)$  est échelonnée en degré donc  $(U_0, \dots, U_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on en déduit que  $U_i$  est génératrice de  $\mathbb{K}[X]$  et que toute sous-famille est libre donc la famille elle-même est libre.

Une famille échelonnée est une base dans  $\mathbb{K}_n[X]$ , mais il ne faut le considérer acquis sur  $\mathbb{K}[X]$  qui est de dimension infinie.

2. On calcule  $\Delta(U_p) = U_{p-1}$  avec  $u_{-n} = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et on conclut par récurrence.
3. On écrit  $P$  décomposée  $(a_0, \dots, a_n)$  dans la base des  $(U_i)$  et on applique  $\Delta^i$  puis on évalue en 0, ce qui donne  $a_i = (\Delta^i P)(0)$ .
4.  $\Leftarrow$  Pour tout  $n \geq p$ , on a  $U_p(n) = \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ .

On procède par récurrence sur  $p$  :  $U_0 = 1$  ne prend que des valeurs entières et soit  $n_0 \leq p$  le plus grand entier tel que  $U_p(n_0) \notin \mathbb{Z}$ , mais alors  $U_p(n_0 + 1) - U_p(n_0) = U_{p-1}(n_0) \in \mathbb{Z}$ , ce qui est contradictoire,  $n_0$  n'existe pas et  $U_p$  est encore à valeurs entières.

$\Rightarrow$  : Si  $P$  ne prend que des valeurs entières, alors  $(\Delta^n P)$  ne prend que des valeurs entières (par récurrence sur  $n$ ) et le 3/ permet de conclure immédiatement.

5. Il est clair que si  $\deg P = n$ , alors  $\Delta^{n+1}(P) = 0$  d'après 3/.

Pour la réciproque, on procède par récurrence sur  $n$ .

Initialisation : Si  $\Delta(f) = 0$  et  $f$  à valeurs entières, alors  $f$  est la fonction constante (faire une récurrence), donc polynômiale.

Hérédité : Supposons que  $\Delta^{n-1}f = 0$  et à valeurs entières impliquent  $f$  polynômiale.

Si  $\Delta^n f = 0$ , alors on pose  $P = f(0) + (\Delta f)(0)U_1 + (\Delta^2 f)(0)U_2 + \dots + (\Delta^{n-1}f)(0)U_n$  et  $\Delta^{n-1}(f - P)$  vérifie appartient à  $\ker \Delta$ , donc constant sur  $\mathbb{Z}$  (initialisation) et vaut 0 en 0, donc est nul.

Par récurrence  $f - P$  est à valeurs entières donc est polynômiale,  $f$  l'est aussi. et on a bien montré le résultat attendu.

**Exercice 2.** Soit l'application  $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{cases}$

1. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme.
2. Chercher  $\deg(\Phi(P))$  en fonction de  $\deg P$ .
3. En déduire  $\ker \Phi$  et  $\operatorname{Im} \Phi$ .
4. Montrer que :  $\forall Q \in \mathbb{K}[X], \exists! P \in \mathbb{K}[X] \text{ tq } \begin{cases} \Phi(P) = Q \\ P(0) = P'(0) = 0 \end{cases}$ .

**Solution 2.**

1-2 La fonction est linéaire et  $\varphi(1) = \varphi(X) = 0$ . On suppose  $n \geq 2$ , et

$$\varphi(X^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k X^{n-k} - 2X^n = 2 \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k}.$$

donc  $\varphi(X^n)$  est un polynôme de degré  $n - 2$  et de coefficient dominant (non nul!)  $2\binom{n}{4}$ . On en déduit que si  $\deg P \leq 1$ , alors  $\varphi(P) = 0$  et sinon  $\deg \varphi(P) = \deg P - 2$ .

3 On sait que  $\text{Im } \varphi = \text{Vect}(\varphi(X^n), n \in \mathbb{N})$  qui est donc engendrée par une famille échelonnée en degré pour  $n \geq 2$ , l'image est donc  $\mathbb{R}[X]$ . De même,  $\varphi(P) = 0$  ssi  $\deg P \leq 2$ .

4 L'existence d'un polynôme  $P = a_0 + \dots + a_n X^n$  tel que  $\varphi(P) = Q$  est assurée par la surjectivité et  $a_0 + a_1 X \in \ker \varphi$  montre que  $P - (a_0 + a_1 X)$  vérifie toutes les conditions.

**Exercice 3.** *Endomorphismes nilpotents* Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . On suppose que  $f$  est un endomorphisme nilpotent de  $E$  : c'est-à-dire  $\exists p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^p = 0$ .

1. Si  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes nilpotents, la somme est-elle nilpotente? Quelle condition naturelle peut-on poser?
2. Soit  $q$  le plus petit entier non nul tel que  $f^q = 0$  ( $q$  est l'indice de nilpotence de  $f$ )
  - (a) Justifier l'existence de  $x_0 \in E$  tel que  $f^{q-1}(x_0) \neq 0$ .
  - (b) Montrer que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{q-1}(x_0))$  est libre.
  - (c) En déduire que  $q \leq n$  puis que  $f^n = 0$ .
  - (d) Montrer que  $f + Id_E$  est inversible.
3. On suppose  $q = n$ . Montrer que le commutant  $C(f)$  de  $f$

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), fg = gf\}$$

vérifie  $C(f) = \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$  :

- (a) Montrer l'inclusion :  $\text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1}) \subset C(f)$ .
- (b) Soit  $g \in C(f)$  et soit un vecteur  $x_0$  comme dans la question 2-a. Soit  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  les coordonnées de  $g(x_0)$  dans la base  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  (justifier que c'est une base). Calculer les coordonnées  $g(f^k(x_0))$ .
- (c) En déduire que  $g = a_0 Id_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$  et conclure.

**Solution 3.**

1. En général la somme de deux endomorphismes nilpotents n'est pas nilpotent, ainsi que le montre l'exemple suivant : soit  $f$  et  $g$  canoniquement associés aux matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = A^T$ .  
Si  $f$  et  $g$  commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

$$(f + g)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^i \circ g^{k-i}.$$

Si  $f^p = 0$ , alors pour  $i \in \llbracket p, n \rrbracket$ ,  $f^i = 0$ .

Et si  $f^q = 0$ , alors  $0 \leq i \leq p-1$ , on voudrait  $g^{k-i} = 0$ . Pour cela, il suffit que  $k-i \geq q$ .

Comme  $i$  vaut au plus  $p-1$ , on veut  $k-(p-1) \geq q$ , soit  $k \geq p+q-1$ . On a donc montrer que  $(f+g)^{p+q-1} = 0$ .

2. comme  $f^{q-1} \neq 0$ , il existe  $x_0 \in E$ , tel que  $f^{q-1}(x_0) \neq 0$
3. S'il existe une combinaison linéaire  $\alpha_l f^l(x_0) + \dots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x_0) = 0$  avec  $\alpha_p \neq 0$ , alors en composant par  $f^{q-1-l}$ , on obtient  $\alpha_l f^{q-1}(x_0) = 0$ . Comme  $f(x_0) \neq 0$ , on a nécessairement  $\alpha_l = 0$ , ce qui contredit  $\alpha_l \neq 0$ . On en déduit que la famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{q-1}(x_0))$  est libre.
4. Une famille libre a au plus  $n$  éléments, donc  $q \leq n$ . Et  $f^n = f^{n-q} \circ f^q = 0$ .
5. La formule de Bernoulli  $Id - f)(Id + f - f^2 + \dots + (-1)^{q-1} f^{q-1}) = Id - f^q = Id$  montre que  $I_n + f$  est inversible et on connaît son inverse.  
(a) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^k$  et  $f$  commutent :  $f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f$ . D'où le résultat.  
(b)-(c) De plus, si  $g$  commute avec  $f$ ,  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  étant une base on peut écrire

$$g(x_0) = \alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0)$$

et pour tout vecteur de la base  $f^i(x_0)$ , on a

$$g(f^i(x_0)) = f^i(g(x_0)) = \alpha_0 f^i(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1+i}(x_0)$$

donc  $g$  coïncide sur une base avec  $\alpha_0 Id + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$  ; ces deux applications sont égales et le commutant est comme annoncé.

## XXX

**Exercice 4.** \* Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $\operatorname{rg} f^4 = \operatorname{rg} f^3$ .

**Exercice 5.** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $f$  non nulle et  $f^3 = 0$ .

1. On suppose que  $f^2 = 0$ . Déterminer le rang de  $f$ , les droites stables par  $f$  et les plans stables par  $f$ .
2. On suppose  $f^2$  non nulle. Déterminer le rang de  $f$  et les sous-espaces de  $E$  stables par  $f$ .

*Solution 4.* On sait que la suite des images de  $f^k$  est décroissante et que si on a égalité à partir d'un certain rang, alors la suite se stabilise.

Si  $\text{Im } f = E$ , alors la suite des images est constante, égale à  $E$ . Donc la propriété est vraie.

On suppose désormais que  $f \neq 0$  et on va procéder par l'absurde : Supposons que  $\text{rg } f^4 < \text{rg } f^3$ . Alors la suite  $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2 \subset \text{Im } f^3 \subset \text{Im } f^4$  est strictement décroissante. Par hypothèse,  $\text{rg } f \leq 2$ , puis  $\text{rg } f^3 \leq 0$  et enfin  $f^4$  serait de rang négatif, ce qui est absurde. Donc la suite des images se stabilise avant, on a nécessairement  $\text{rg } f^4 = \text{rg } f^3$ .

De même, si  $E$  est de dimension  $n$ , alors  $\text{rg } f^n = \text{rg } f^{n+1}$ .