

## Colle 03 Polynômes d'endomorphismes

CHUTO Evan

**Exercice 1.** Soit  $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  dont la matrice dans la base canonique est  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \ker(\phi^2) \oplus \ker(\phi - 2Id)$ .

2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de  $\phi$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

3. Soit  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $g^2 = \phi$ . Montrer que  $\ker(\phi^2)$  est stable par  $g$ . En déduire qu'un tel  $g$  n'existe pas.

**Exercice 2.** Soit  $A \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $B^p = 0_n$ ,  $B \neq 0$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $I_n + a^{-1}BA$  est inversible et exprimer son inverse.

2. On pose

$$H = \{I_n + P(B) \mid P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}.$$

Montrer que  $H$  est un sous-groupe commutatif de  $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$ .

**Exercice 3.** Soient  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  deux polynômes qui sont premiers entre eux. Existe-t-il  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $P(A) = Q(A) = 0$  ?

**Solution 1.**

1. On vérifie que le polynôme  $X^2 \times (X-2)$  est un polynôme annulateur de  $\varphi$  et on applique le théorème des noyaux.
2. On prend une base un vecteur  $a \in \ker \varphi^2$  tel que  $\varphi(a) \neq 0$ . Alors  $(\varphi(a), a)$  est une base de  $\ker \varphi^2$  et on complète avec un vecteur tel que  $u(b) = 2b$ .
3. On a  $\varphi \circ g = g^3 = g \circ \varphi$ . Donc, si  $\varphi(x) = 0$ , alors  $g(\varphi(x)) = 0$ .  
Si  $g^2 = \varphi$ , alors  $\ker g \subset \ker g^2 = \ker \varphi$ . Mais  $\dim \ker \varphi = 1$ , donc  $\dim \ker g = 1$ . On en déduit que  $\ker g = \ker g^2$  et donc est encore égal à  $\ker g^4 = E$ , ce qui est impossible. Il n'existe pas  $g$  tel que  $g^2 = I_n$ .

**Solution 2.**

1. On calcule  $(I_n + B)(I - B + B^2 + \dots + (-1)^{p-1}B^{p-1}) = I_n$ , d'où  $I + A^{-1}BA$  est inversible d'inverse  $I - A^{-1}BA + A^{-1}B^2A + \dots + (-1)^{p-1}A^{-1}B^{p-1}A$ .
2. Il est clair que  $H$  est non vide et stable par produit et que la multiplication est commutative. Il faut essentiellement prouver que  $I + P(B)$  est inversible dans  $H$  : or  $P(0) = 0$  montre que  $P(B) = a_1B + \dots + a_dB^d$  et la formule du binôme montre que  $P(B)^p = 0$  et on applique  $1/$  à  $P(B)$ .

**Solution 3.** D'après le théorème de Bézout, comme  $\text{pgcd}(P, Q) = 1$ , il existe  $R, S \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $P(X).R(X) + Q(X).S(X) = 1$ .

Si on avait  $P(A) = Q(A) = 0$ , on aurait alors

$$I_n = (R.P + S.Q)(A) = R(A).P(A) + S(A).Q(A) = 0 + 0 + 0,$$

ce qui est impossible.

Une telle matrice  $A$  n'existe pas.

**Exercice 4.**

1. Soit la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $4A^3 = 4A^2 - A + I_n$ , où  $I_n$  est la matrice identité.
  - (a) Montrer que la suite  $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $M$  que l'on déterminera en fonction de  $A$ .
  - (b) Montrer que  $M$  la matrice d'une projection que l'on caractérisera.
2. Soit la matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
  - (a) On suppose que  $B^2 + B + I_n = 0$ , montrer que  $n$  est pair.
  - (b) On suppose que  $B^3 + B^2 + B = 0$ , montrer que le rang de  $B$  est pair.

**Exercice 5.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $\text{rg } f^4 = \text{rg } f^3$ .

**Solution 4.**

1. (a) On pose le polynôme  $P = 4X^3 - 4X^2 + X - 1 = 4(X - 1)(X - \frac{i}{2})(X + \frac{i}{2})$ .  $P$  annule  $A$ .  
On fait la division euclidienne de  $X^p$  par  $P$  :  $X^p = Q_p(X)P(X) + R_p(X)$  avec

$$R_p(X) = Q_p(X)P(X) + \alpha_p(X - \frac{i}{2})(X + \frac{i}{2}) + \beta_p(X + \frac{i}{2})(X - 1) + \gamma_p(X - \frac{i}{2})(X - 1)$$

qui donne le système pour  $X = 1, i/2$  et  $-i/2$  :

$$\begin{cases} 1 = \alpha_p(1 - \frac{i}{2})(1 + \frac{i}{2}) \\ \left(\frac{i}{2}\right)^p = \beta_p i \left(\frac{i}{2} - 1\right) \\ \left(-\frac{i}{2}\right)^p = \gamma_p i \left(\frac{i}{2} + 1\right) \end{cases}$$

On en déduit  $\alpha_p = \frac{4}{5}$  et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \beta_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \gamma_p = 0$ .

On obtient finalement

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} A^p = \frac{4}{5}(A - \frac{i}{2}I_n)(A + \frac{i}{2}I_n) = \frac{1}{5}(4A^2 + I_n) = M.$$

- (b) On a  $\lim_{p \rightarrow +\infty} A^{2p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} A^p$ , donc  $M^2 = M$  et  $M$  est un projecteur.

On montre que l'image de  $M$  est égale à  $\ker(A - I_n)$  : on a  $(A - I_n)M = 0$  d'où une inclusion et dans l'autre sens si  $AV = V$ , alors  $A^pV = V$  et donc  $LV = V$  et  $V \in \text{Im } M$ .

Enfin  $M(A - I_n) = 0$  montre que  $\text{Im}(A - I_n) \subset \ker M$  et avec le théorème du rang on obtient l'égalité.  $M$  est donc la projection sur  $\ker(A - I_n)$  parallèlement à  $\text{Im}(A - I_n)$ .

2. (a)  $X^2 + X + 1$  est un polynôme annulateur de  $B$  de racine  $j$  et  $j^2 = \bar{j}$ . Le théorème des noyaux nous dit que  $E = \ker(B - jI_n) \oplus \ker(B - j^2I_n)$ . Mais  $\ker(B - jI_n) \rightarrow \ker(B - jI_n)$ ,  $X \mapsto \bar{X}$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire et c'est un isomorphisme. Donc ils ont même dimension et  $\dim E$  est paire.  
On pourra dire bientôt que  $X^2 + X + 1$  n'ayant pas de racines réelle, le polynôme caractéristique de  $B$  n'a pas de racines réelles non plus et donc est de degré pair, la dimension de  $E$ .

- (b) Avec les abus de notations usuelles,  $\text{Im } B$  stable par  $B$  et la restriction à  $\text{Im } B$  vérifie  $1/$ , donc le rang de  $B$  est pair.

**Solution 5.** On sait que la suite des images de  $f^k$  est décroissante et que si on a égalité à partir d'un certain rang, alors la suite se stabilise.

Si  $\text{Im } f = E$ , alors la suite des images est constante, égale à  $E$ . Donc la propriété est vraie.

On suppose désormais que  $f \neq 0$  et on va procéder par l'absurde : Supposons que  $\text{rg } f^4 < \text{rg } f^3$ . Alors la suite  $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2 \subset \text{Im } f^3 \subset \text{Im } f^4$  est strictement décroissante. Par hypothèse,  $\text{rg } f \leq 2$ , puis  $\text{rg } f^3 \leq 0$  et enfin  $f^4$  serait de rang négatif, ce qui est absurde. Donc la suite des images se stabilise avant, on a nécessairement  $\text{rg } f^4 = \text{rg } f^3$ .

De même, si  $E$  est de dimension  $n$ , alors  $\text{rg } f^n = \text{rg } f^{n+1}$ .

# XXX

**Exercice 6.** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie non nulle et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Pour  $x \in E$  non nul, on définit  $\text{Ann}(x) = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0\}$ .  
 Montrer que  $\text{Ann}(x)$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ , c'est-à-dire que  $(\text{Ann}(x), +)$  est un sous-groupe et pour tous  $Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $P \in \text{Ann}(x)$ , alors  $PQ \in \text{Ann}(x)$ .  
 En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire  $\pi_x$  tel que

$$P(u)(x) = 0 \iff \pi_x \text{ divise } P$$

2. Montrer que  $\deg(\pi_x) = \dim(\text{Vect}\{u^k(x), k \in \mathbb{N}\})$ .
3. On suppose dans cette question que le polynôme minimal de  $u$  est de la forme  $\pi_u = P^\alpha$  avec  $P$  un polynôme irréductible sur  $\mathbb{K}$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ .  
 Montrer qu'il existe un vecteur  $e$  non nul tel que  $\pi_u = \pi_e$ .
4. S'il existe des sous-espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_p$  de  $E$ , stables par  $u$  tels que  $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i$ , on notera  $u_i$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $E_i$  et  $\pi_{u_i}$  son polynôme minimal.  
 Montrer que dans ce cas le polynôme minimal de  $u$  et  $\pi_u = \text{ppcm}(\pi_{u_1}, \dots, \pi_{u_p})$ .
5. L'endomorphisme  $u$  étant quelconque, montrer qu'il existe un vecteur  $e$  non nul tel que  $\pi_u = \pi_e$ .

**Solution 6.**

1. Même preuve que pour l'existence du polynôme minimal annulateur d'un endomorphisme.
2. La division euclidienne par  $\pi_u$  donne immédiatement le résultat.
3. on prend  $e$  tel que  $\deg(\pi_e)$  soit maximal; on a  $\pi_e | \pi_u$  donc  $\pi_e = P^\beta$  avec  $\beta \leq \alpha$ . Si  $x \in E$  alors  $\pi_x = P^\gamma$  avec  $\gamma \leq \beta$  donc  $\pi_e(u)(x) = 0$  puis  $\pi_e(u) = 0$  et  $\pi_u | \pi_e$ .
4. facile matriciellement dans une base adaptée.
5.  $\pi_u = \prod P_i^{\alpha_i}$ , lemme des noyaux avec  $E_i = \ker(P_i^{\alpha_i})$  puis  $e_i \in E_i$  tel que  $\pi_{e_i} = \pi_{u_i}$  et on prend  $e = e_1 + \dots + e_p$ . On a  $P(u)(e) = \sum P(u)(e_i) = 0$  ssi  $P(u)(e_i) = 0$  car  $P(u)(e_i) \in E_i$  et la somme est directe. On en déduit  $\pi_{e_i} | \pi_e$  puis  $\pi_e = \text{ppcm}(\pi_{e_i})$ .