Corrigé de la colle n° 02

Algèbre linéaire

26 septembre 2025

Exercice 1. Soient U, V et W trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que :

a) $U \cap V = U \cap W$;
b) $U + V = U + W$;
c) $V \subset W$.

1. Montrer que V est égal à W.
2. Montrer que :
   (i) a) et b) n'implique pas $V = W$;
   (ii) a) et c) n'implique pas $V = W$;
   (iii) b) et c) n'implique pas $V = W$.

---

1. Pour montrer que $V = W$, il suffit de montrer que W est inclus dans V car nous avons déjà l'autre inclusion. Soit $z \in W$. D'après b), il existe $(x, y) \in U \times V$ tel que $z = x + y$. Or V est inclus dans W, donc $x = z - y$ appartient à $U \cap W$. D'après a), il appartient aussi à $U \cap V$. Donc $x = z - y$ appartient à V et donc $z = x + y$ appartient à V. D'où $V = W$.
2. (i) Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, $U = \mathrm{Vect}\,(1, 1)$, $V = \mathrm{Vect}\,(1, 0)$ et $\mathrm{Vect}\,(0, 1)$ vérifient $U \cap V = U \cap W = \{0\}$ et $U + V = U + W = \mathbb{R}^2$. Mais V n'est pas égal à W.
   (ii) Les sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}$, $U = V = \{0\}$ et $W = \mathbb{R}$ vérifient $U \cap V = U \cap W = \{0\}$ et $V \subset W$. Mais V n'est pas égal à W.
   (iii) Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}$, $V = \{0\}$ et $W = \mathbb{R}$ vérifient $U + V = U + W = \mathbb{R}$ et $V \subset W$. Mais V n'est pas égal à W.

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0,\ z + t = 0\right\}$$
$$\text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\left\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Déterminer la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G dans la base canonique.
3. Calculer la matrice de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G dans la base canonique.

---

1. Soit $x = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:
$$(x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} y = -x \\ t = -z \end{cases} \iff (x, y, z, t) = xa + zb,$$
où $a = (1, -1, 0, 0)$ et $b = (0, 0, 1, -1)$. Donc $\mathcal{B}_1 = (a, b)$ est une base de F.

   $G = \mathrm{Vect}(c, d)$, avec $c = (1, 1, 0, 0)$ et $d = (0, 0, 1, 1)$. La famille $\mathcal{B}_2 = (c, d)$ est donc génératrice de G, elle est aussi libre, donc c'est une base de G.

   On concatène ces deux bases : la famille $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ car elle contient 4 vecteurs et elle est libre. En effet : pours tous scalaires α, β, γ et δ,
$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0 \implies \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$
   Donc F et G sont supplémentaires.

2. La matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
car $p(a) = a$, $p(b) = b$, $p(c) = 0$ et $p(d) = 0$. Donc la matrice A de p dans la base canonique est égale à $P \cdot A' \cdot P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On inverse la matrice de passage : $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc la matrice de p dans la base canonique est :
$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $s = 2p - Id$. Donc La matrice de la symétrie s dans la base canonique est :
$$2A - I_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. 1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}_n$ des matrices antisymétriques et celui $\mathscr{S}_n$ des matrices symétriques sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Quelles sont leurs dimensions ?

2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique A, une unique matrice symétrique S et un unique réel $c \in \mathbb{R}$ tels que
$$M = A + S + cI_n \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(S) = 0.$$

3. En déduire la décomposition de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en la somme directe de trois sous-espaces vectoriels.

---

1. L'ensemble $\mathscr{A}_n$ des matrices de taille $n \times n$ antisymétriques est un *sev* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble $\mathscr{S}_n$ des matrices symétriques est aussi un *sev*. Et ces deux *sev* sont supplémentaires car : soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   Première méthode – Analyse : si $M = A + S'$ et $A^T = -A$ et $S'^T = S'$, alors $M^T = -A + S'$, d'où $A = \frac{M-M^T}{2}$ et $S' = \frac{M+M^T}{2}$. D'où l'unicité du couple (A, S'). Synthèse : soient $A = \frac{M-M^T}{2}$ et $S' = \frac{M+M^T}{2}$. Alors $M = A + S'$ et $A^T = -A$ et $S'^T = S$. D'où l'existence du couple (A, S').

   Deuxième méthode – La matrice $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$ est antisymétrique car $A^T = -A$ et la matrice $S' = \frac{1}{2}(M + M^T)$ est symétrique car $S'^T = S'$. De plus, $A + S'$ est égal à M. D'où $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n + \mathscr{S}_n$. Et cette somme est directe car : si $M^T = M$ et $M^T = -M$, alors $M = -M$, d'où $M = 0$. Donc $\mathscr{A}_n \cap \mathscr{S}_n = \{0\}$.

   La dimension de $\mathscr{A}_n$ est $\frac{n(n-1)}{2}$ car $(E_{ij} - E_{ji})_{j>i}$ est une base de $\mathscr{A}_n$.

   Et la dimension de $\mathscr{S}_n$ est $\frac{n(n+1)}{2}$ car $(E_{ij} + E_{ji})_{j>i} \cup (E_{ii})_i$ est une base de $\mathscr{S}_n$.

2. <u>Existence</u> : Posons maintenant $c = \frac{\mathrm{tr}(S')}{n}$ et $S = S' - cI_n$. On a alors : $\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(S') - \mathrm{tr}(cI_n) = 0$.

   Enfin $A + S + cI_n = A + S' = M$.

   <u>Unicité</u> : La décomposition $S' = S + cI_n$ est unique car elle implique que $\mathrm{tr}\, S' = \mathrm{tr}\, S + \mathrm{tr}(cI_n)$, d'où $c = \frac{\mathrm{tr}(S')}{n}$, donc c est unique.

3. L'ensemble $\mathscr{S}_n \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ des matrices symétriques de trace nulle est un *sev* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est l'intersection de deux *sev*. Et $\mathrm{Vect}(I_n)$ est aussi un *sev*. De l'existence et de l'unicité de la décomposition $M = A + S + cI_n$, on tire que : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n \oplus (\mathscr{S}_n \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel.

1. Soient p et q deux endomorphismes de E tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que :
$$\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q).$$
2. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que :
   (a) $p \circ q$ est un projecteur ;
   (b) les inclusions précédentes sont des égalités.

Soit E un espace vectoriel.

1. Il suffit de montrer que : $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$ et $\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$.

   Hypothèse : $p \circ q = q \circ p$.

   Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$. D'où $p(x) = 0_E$, d'où $q \circ p(x) = q[p(x)] = q(0_E) = 0_E$, d'où $x \in \mathrm{Ker}(q \circ p)$, d'où $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$ (car $p \circ q = q \circ p$).

   Conclusion : $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$.

   De même, $\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$.
2. Par hypothèse, $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = q \circ p$.
   (a) $(p \circ q) \circ (p \circ q) = (p \circ q) \circ (q \circ p) = p \circ (q \circ q) \circ p = p \circ q \circ p = p \circ p \circ q = p \circ q$, donc $p \circ q$ est un projecteur.
   (b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$. Ce vecteur x s'écrit $x = q(x) + [x - q(x)]$.

   D'une part, $q(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ car $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$.

   D'autre part, $x - q(x) \in \mathrm{Ker}(q)$ car $q[x - q(x)] = q(x) - q \circ q(x) = q(x) - q(x) = 0_E$.

   Donc $\mathrm{Ker}(p \circ q) \subset \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$. Et l'incusion dans l'autre sens a déjà été montrée, d'où l'égalité.

   Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

   D'une part, $\exists x_1 \in E,\ y = p(x_1)$ car $y \in \mathrm{Im}(p)$. D'autre part, $\exists x_2 \in E,\ y = q(x_2)$ car $y \in \mathrm{Im}(q)$.

   Or $p \circ p = p$ car p est un projecteur. D'où $y = p(y) = p \circ q(x_2)$. D'où $y \in \mathrm{Im}(p \circ q)$. Donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p \circ q)$. Et l'inclusion dans l'autre sens a déjà été montrée, d'où l'égalité.