COLLE N° 03

Algèbre linéaire

Exercice 1 (Racines carrées d'une matrice). Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et f l'endomorphisme de E représenté, dans la base (e_1, e_2, e_3), par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer, si elle existe, une base (u, v, w) de E dans laquelle la matrice de l'endomorphsme f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose que g est un endomorphisme de E tel que $g^2 = f$. On note N la matrice, dans la base (u, v, w), de cet endomorphisme g. Montrer que

$$\exists (s, t, x, y) \in \mathbb{R}^4, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer toutes les matrices carrées N telles que $N^2 = B$ et en déduire toutes les matrices carrées M telles que $M^2 = A$.

Exercice 2 (Un endomorphisme défini par une intégrale impropre).

1. Justifier que l'ensemble E des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
2. Soit une fonction $f \in E$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(f)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} f(u)\, du.$$

   Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est bien définie, qu'elle est bornée, qu'elle est dérivable et que sa dérivée $\Phi(f)'$ est égale à $\Phi(f) - f$.
3. Justifier que l'application $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? surjectif ?
4. Déterminer toutes les fonctions f dans E telles que $\Phi(f) = f$.
5. Pour quelles valeurs du réel λ l'équation $\Phi(f) = \lambda f$ posséde-t-elle une solution non nulle dans E ?