FEUILLE DE T.D. N° 3

Intégrales

Exercice 1. 1. Montrer que la fonction G définie pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$G(x) = \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t})\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}(\sqrt{t})\, dt$$

est constante.

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 u \cdot \operatorname{Arcsin}(u)\, du \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t})\, dt.$$

Conclure.

Exercice 2. Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln(t)}\, dt$.

1. Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{[2x - \ln(2x)]\,[x - \ln(x)]}.$$

2. Montrer que, pour tout x strictement positif, $0 \leq F(x) \leq x$.
3. Déterminer un équivalent de $\frac{1}{t-\ln(t)} - \frac{1}{t}$ quand t tend vers $+\infty$ et calculer $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\ln t}{t^2}\, dt$ pour tout $x > 0$.
4. Étudier les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction F.

Exercice 3. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \frac{pq}{p+q}$.

1. ▷ **Réviser les sommes de Riemann.** Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{p+n}$ est équivalent à $n(1 - \ln 2)$.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $S_n - S_{n-1} = 2nu_n - \dfrac{n}{2}$. En déduire un équivalent de S_n.

Exercice 4. Montrer que ces intégrales convergent et les calculer :

$$A = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} dx \qquad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \qquad C = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt$$

Exercice 5. Etudiez la convergence des intégrales suivantes :

$$D = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx \qquad E = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$F = \int_7^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,dx \qquad G = \int_0^7 \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,dx$$
$$H = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t}\,dt \qquad I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t}\,dt$$
$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}\,dt \qquad K = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$

Exercice 6. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha}(1-e^{-1/\sqrt{x}})\,dx$$

converge.

Exercice 7. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et on rappelle que $H_n - \ln(n)$ tend vers un réel γ appelé la *constante d'Euler*. Soit, pour tout réel $t > 0$,

$$f(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor.$$

1. Représenter graphiquement la fonction f et justifier qu'elle est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ est convergente.
3. Calculer, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $I_n = \int_{1/n}^1 f(t)\,dt$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Exercice 8. On étudie la fonction $F\ :]-\infty, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ appelée le **dilogarithme**.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ est convergente.
2. On note $\lambda = -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$. Montrer que $\lambda = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx$.
3. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}\,dx$ converge et la calculer.
4. En déduire que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} x\,\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx$.
5. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le \lambda - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{n}$. Qu'en déduire ?

Exercice 9. Soit $f\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$.

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,dt$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

Retrouver cet équivalent en utilisant la ▷ **proposition 15 du chapitre III**.

Exercice 10. Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\, dt \qquad \text{et} \qquad b_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt.$$

1. Montrer que ces intégrales généralisées sont convergentes.
2. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Quelle est la valeur de cette constante ?
3. Montrer que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = I$.
5. (**Lemme de Riemann-Lebesgue**) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f(t)\sin(\lambda t)\, dt = 0.$$

6. Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \text{ si } t \neq 0.$$

   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
7. Etudier $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n)$.
8. (**Intégrale de Dirichlet**) Montrer que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}}$

Exercice 11.

1. Montrer que les intégrales généralisées

$$A = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, dt \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\, dt$$

   sont convergentes.
2. Montrer que, pour chaque $n \geq 2$, le réel $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}}\, dx$ est égal à $\displaystyle\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{1/n}\left(1-t^{1/n}\right)}{1-t}\, dt$.
3. Soient $t \in]0,1]$ et, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = t^x(1-t^x)$. Montrer que la fonction f est deux fois dérivable. Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et montrer que, pour tout $x \geq 0$, $|f''(x)| \leq 3(\ln t)^2$.
4. ▷ **Réviser la formule de Taylor avec reste intégral.**
   En déduire que, pour tout $t \in]0,1]$,

$$\left| t^{1/n}\left(1-t^{1/n}\right) + \frac{1}{n}\ln t \right| \leq \frac{3(\ln t)^2}{2n^2}$$

5. Montrer que $\displaystyle\left| a_n - \frac{A}{n^2} \right| \leq \frac{3B}{2n^3}$. En déduire un équivalent de a_n.

Exercice 12.

1. Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln^\alpha(t)\, dt$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$?
2. Après une intégration par parties, déterminer un équivalent, quand x tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_2^x \ln^\alpha(t)\, dt$.

Et aussi : l'exercice 28 de la banque CCINP, l'exercice du DS n° 3 MPI 2024-2025 & l'exercice du DS n° 3 MPI* 2024-2025.