

CORRIGÉ DU T.D. N° 3

Intégrales

30 septembre 2025

Exercice 1. 1. Montrer que la fonction G définie pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$G(x) = \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}(\sqrt{t}) dt$$

est constante.

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 u \cdot \operatorname{Arcsin}(u) du \quad \text{et} \quad \int_0^1 \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) dt.$$

Conclure.

1. La fonction $t \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t})$ est continue, elle possède donc une primitive E qui permet d'écrire $\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) dt = E(\sin^2 x) - E(0)$. De même $\int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}(\sqrt{t}) dt = F(\cos^2 x) - F(0)$ en notant F une primitive de la fonction continue $t \mapsto \operatorname{Arccos}(\sqrt{t})$.

La fonction G est dérivable car les fonctions E et F le sont. Et, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$G'(x) = (\sin^2 x)' \cdot \operatorname{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) + (\cos^2 x)' \cdot \operatorname{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x}) = 2 \sin(x) \cos(x) \cdot x - 2 \sin(x) \cos(x) \cdot x = 0.$$

La dérivée de G est nulle sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction G est donc constante sur cet intervalle. Pour calculer cette constante, donnons à x la valeur particulière $\frac{\pi}{2}$:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^0 \operatorname{Arccos}(\sqrt{t}) dt = \int_0^1 \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) dt$$

qu'on calcule à la question suivante.

2. D'une part, en posant le changement de variable $t = u^2$ qui est bien de classe \mathcal{C}^1 , avec $dt = 2u du$:

$$\int_0^1 \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) dt = \int_0^1 \operatorname{Arcsin}(u) 2u du.$$

D'autre part, en posant le changement de variable $u = \sin(\theta)$ qui est bien de classe \mathcal{C}^1 , avec $du = \cos(\theta) d\theta$:

$$\int_0^1 u \cdot \operatorname{Arcsin}(u) du = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cdot \theta \cdot \cos(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \theta \cdot \sin(2\theta) d\theta.$$

Puis on intègre par parties, les fonctions $\theta \mapsto \theta$ et $\theta \mapsto \frac{-\cos 2\theta}{2}$ étant bien de classe \mathcal{C}^1 :

$$\int_0^1 u \cdot \operatorname{Arcsin}(u) du = \frac{1}{2} \left[\theta \cdot \frac{-\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \frac{-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta \cdot \frac{-\cos 2\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.$$

On conclut :

$$\forall x \in [0, \pi/2], G(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2. Soit $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln(t)} dt$.

1. Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{[2x - \ln(2x)][x - \ln(x)]}.$$

2. Montrer que, pour tout x strictement positif, $0 \leq F(x) \leq x$.

3. Déterminer un équivalent de $\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t}$ quand t tend vers $+\infty$ et calculer $\int_x^{2x} \frac{\ln t}{t^2} dt$ pour tout $x > 0$.

4. Étudier les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction F .

1. Pour tout $t > 0$, $\ln t \leq t - 1$ par concavité du logarithme. D'où $t - \ln t \geq 1$.

(Autre méthode — Soit, pour tout $t > 0$, $g(t) = t - \ln(t)$. La fonction g est dérivable et $g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$. D'où le tableau des variations de g :

t	0	1	
$g'(t)$		- 0 +	
$g(t)$		\ ↘	↗
		1	

Donc, pour tout $t > 0$, $g(t)$ est supérieur ou égal à 1.)

Ainsi la fonction $t \mapsto \frac{1}{t - \ln(t)}$ est continue sur $[x, 2x]$. Elle possède donc une primitive G : la fonction G est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $G'(t) = \frac{1}{t - \ln(t)}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. Alors $\int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln(t)} dt = G(2x) - G(x)$, d'où $F(x) = G(2x) - G(x)$. La fonction F est dérivable (car G est dérivable) et

$$\forall x > 0, F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2 \frac{1}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{[2x - \ln(2x)][x - \ln(x)]}.$$

2. De $t - \ln t \geq 1$, on tire que $0 \leq \frac{1}{t - \ln t} \leq 1$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln(t)} dt \leq \int_x^{2x} 1 dt = 2x - x$. Donc

$$0 \leq F(x) \leq x.$$

3. On met en facteur le terme dominant : $\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \cdot \left[\frac{1}{1 - \frac{\ln t}{t}} - 1 \right]$. Puis on fait un D.L. : $\frac{\ln t}{t} \rightarrow 0$, d'où

$\frac{1}{1 - \frac{\ln t}{t}} = 1 + \frac{\ln t}{t} + \frac{\ln t}{t} \varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$. D'où $\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} = \frac{\ln t}{t^2} \cdot [1 + \varepsilon(t)]$. Donc

$$\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \sim \frac{\ln t}{t^2} \text{ si } t \text{ tend vers } +\infty.$$

Soit $x > 0$. On calcule $\int_x^{2x} \frac{\ln t}{t^2} dt$ en intégrant par parties : les fonctions $u : t \mapsto \ln t$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t}$ sont de classe \mathcal{C}^1 , d'où

$$\int_x^{2x} uv' = [uv]_x^{2x} - \int_x^{2x} u'v = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_x^{2x} + \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_x^{2x} + \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{2x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{\ln(2x)}{2x} - \frac{1}{2x}.$$

4. De $0 \leq F(x) \leq x$, on tire grâce au théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0^+$.

Pour t assez grand (c'est-à-dire pour tout t supérieur à un certain T) :

- d'une part $\ln(t) \geq 0$, d'où $\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \geq 0$;

- d'autre part, $1 + \varepsilon(t) \leq 2$ (car $\varepsilon(t)$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$).

Donc $\exists T > 0, \forall t \geq T, 0 \leq \frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \leq 2 \cdot \frac{\ln t}{t^2}$.

Par croissance de l'intégrale, si $x \geq T, 0 \leq \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \right) dt \leq 2 \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{\ln(2x)}{2x} - \frac{1}{2x} \right]$, donc (théorème des gendarmes) $\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \right) dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Autrement dit : $F(x) - \ln 2$ tend vers zéro, donc

$$F(x) \text{ tend vers } \ln(2) \text{ si } x \text{ tend vers } +\infty.$$

Exercice 3. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{pq}{p+q}$.

1. ▷ Réviser les sommes de Riemann. Montrer que $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{p}{p+n}$ est équivalent à $n(1 - \ln 2)$.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2, S_n - S_{n-1} = 2nu_n - \frac{n}{2}$. En déduire un équivalent de S_n .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \frac{\frac{p}{n}}{\frac{p}{n} + 1}$ est une somme de Riemann de la fonction $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x+1}$ qui est continue sur le segment $[0, 1]$, d'où $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = 1 - \ln 2$. Donc $u_n \sim n(1 - \ln 2)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = 2 \sum_{p=1}^n \frac{np}{p+n} - \frac{n}{2} = 2nu_n - \frac{n}{2}$, d'où $S_n - S_{n-1} \sim 2n^2(1 - \ln 2)$. On sort le télescope : $S_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n (S_k - S_{k-1})$ pour tout $n \geq 2$. Or $S_n - S_{n-1} \sim 2n^2(1 - \ln 2)$ qui ne change pas de signe, d'où : les deux séries divergent et, par sommation des équivalents ▷ théorème 14 du chapitre I,

$$S_n \sim 2(1 - \ln 2) \sum_{k=2}^n k^2 \sim 2(1 - \ln 2) \frac{n^3}{3}.$$

Exercice 4. Montrer que ces intégrales convergent et les calculer :

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \quad C = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt$$

Exercice 5. Etudiez la convergence des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} D &= \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx & E &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx \\ F &= \int_7^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx & G &= \int_0^7 e^{-x} \ln(x) dx \\ H &= \int_0^1 \frac{e^{\sin t}}{t} dt & I &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt \\ J &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t} dt & K &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

Exercice 6. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}}) dx$$

converge.

- La fonction $x \mapsto x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}})$ est continue positive sur $]0, +\infty[$.
- Comme $x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}}) \sim x^\alpha$ quand $x \rightarrow 0$, l'intégrale $\int_0^1 x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}}) dx$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.
- Comme $x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}}) \sim x^{\alpha-1/2}$ quand $x \rightarrow +\infty$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}}) dx$ converge si et seulement si $\alpha < -1/2$.

Conclusion :

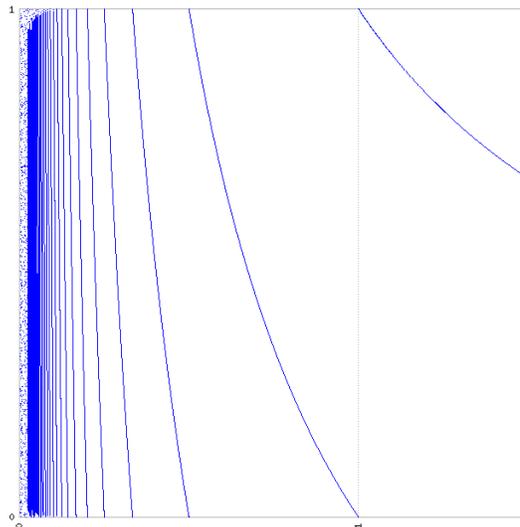
$$\int_0^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{x}}) dx \text{ converge} \iff -1 < \alpha < -\frac{1}{2}.$$

Exercice 7. On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et on rappelle que $H_n - \ln(n)$ tend vers un réel γ appelé la *constante d'Euler*. Soit, pour tout réel $t > 0$,

$$f(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor.$$

1. Représenter graphiquement la fonction f et justifier qu'elle est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ est convergente.
3. Calculer, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $I_n = \int_{1/n}^1 f(t) dt$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$.

1. La fonction f est *cpm* sur $]0, +\infty[$ car (c'est la définition) elle est *cpm* sur chaque segment inclus dans $]0, +\infty[$. En effet, un tel segment contient un nombre fini de discontinuités en des abscisses $t_n = \frac{1}{n}$. Et, en chaque t_n , la fonction vaut $f(\frac{1}{n}) = 0$, a une limite à gauche égale à 0 et une limite à droite égale à 1.



2. $\forall t > 0, 0 \leq f(t) \leq 1$. Or l'intégrale $\int_0^1 1 dt$ converge. Donc l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ converge aussi.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_{1/n}^1 f(t) dt = \int_{1/n}^1 \frac{1}{t} dt - \int_{1/n}^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$. La première intégrale vaut $\ln(n)$. La seconde vaut $\sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} k dt = \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n - 1$. Donc $I_n = 1 + \ln(n) - H_n$.
4. D'après la première question, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt$. D'après la seconde question, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \gamma$. Donc $\int_0^1 f(t) dt = 1 - \gamma$.

Exercice 8. On étudie la fonction $F :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ appelée le **dilogarithme**.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ est convergente.
2. On note $\lambda = - \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$. Montrer que $\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$.
3. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$ converge et la calculer.
4. En déduire que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} x \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1} dx$.
5. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \lambda - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$. Qu'en déduire ?

1. L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ est impropre en 0 et en 1. Elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $I_1 = \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ et $I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ convergent.

L'intégrale I_1 est impropre en 0. Or $\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t$, d'où $\frac{\ln(1-t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} -1$. D'où l'intégrale I_1 converge car elle est faussement impropre.

L'intégrale I_2 est impropre en 1. Or $\frac{\ln(1-t)}{t} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \ln(1-t)$ et l'intégrale $\int_{1/2}^1 \ln(1-t) dt$ converge car $\int_{1/2}^c \ln(1-t) dt = [(t-1)\ln(1-t) - t]_{1/2}^c \xrightarrow{c \rightarrow 1^-} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$. Donc l'intégrale I est convergente.

2. On fait le CDV $x = -\ln(1-t)$, de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissant de $[0, 1[$ vers $[0, +\infty[$:

$$\lambda = - \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{-x}{1 - e^{-x}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx.$$

3. On fait une IPP : $\int_0^a x e^{-kx} dx = \left[x \frac{e^{-kx}}{-k} \right]_0^a - \int_0^a \frac{e^{-kx}}{-k} dx \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^2}$ par croissances comparées. Donc l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$$4. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx = \int_0^{+\infty} x \left(\sum_{k=1}^n e^{-kx} \right) dx.$$

Or, pour tout $x > 0$, $\sum_{k=1}^n e^{-kx} = e^{-x} \frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}$ en reconnaissant une somme géométrique de raison $e^{-x} \neq 1$. Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} x \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1} dx, \text{ cette dernière intégrale étant impropre en } 0.$$

5. Soit $x \geq 0$. D'après le TAF, $\exists \epsilon \in]0, x[$, $e^x - e^0 = e^\epsilon \cdot (x - 0)$. Or $e^\epsilon \geq 1$. Donc $x \leq e^x - 1$.

(Autre méthode : dresser le tableau des variations de la fonction $[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x - x - 1$ pour montrer qu'elle est positive. Ou encore : utiliser la convexité de la fonction exp.)

$$6. \lambda - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx - \int_0^{+\infty} x \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} dx.$$

D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $x \leq e^x - 1$, d'où $0 \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$ en divisant par $e^x - 1 > 0$. D'où $0 \leq \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}$. Donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \lambda - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$.

D'après la question précédente et en utilisant le théorème des gendarmes, la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge et $\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 9. Soit $f: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .

Retrouver cet équivalent en utilisant la [▷ proposition 15 du chapitre III](#).

L'idée est de comparer $f(x)$ à $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$. Or

$$g(x) = f(x) - \ln x = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt$$

et la fonction $t \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 (par la valeur 1), donc l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ converge. Posons $a = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$. On a ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) - \ln x] = -a$, ce qui permet d'écrire, lorsque $x \rightarrow 0^+$:

$$f(x) = \ln x - a + o(1).$$

Donc $f(x) \sim \ln x$ quand x tend vers 0^+ .

Exercice 10. Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt \quad \text{et} \quad b_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$$

1. Montrer que ces intégrales généralisées sont convergentes.
2. Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Quelle est la valeur de cette constante ?
3. Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = I$.
5. (**Lemme de Riemann-Lebesgue**) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

6. Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \text{ si } t \neq 0.$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 .

7. Étudier $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n)$.

8. (**Intégrale de Dirichlet**) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

-
1. Les deux intégrales sont impropres en 0. Or $\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2n+1$, d'où : ces deux fonctions sont continues sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et ont une limite finie en 0^+ , donc les intégrales a_n et b_n sont faussement impropres, donc convergentes.

2. $b_{n+1} - b_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t}{\sin t} dt$. Or $\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t = 2 \sin t \cdot \cos(2n+2)t$, d'où $b_{n+1} - b_n = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(2n+2)t dt = 0$. Donc la suite (b_n) est constante (et égale à $b_0 = \frac{\pi}{2}$).

3. L'intégrale I est impropre en 0 et en $+\infty$: Elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $I_0 = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$ et $I_1 = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ convergent.

L'intégrale I_0 est impropre en 0. Elle converge car c'est l'intégrale a_0 de la question ??.

L'intégrale I_1 est impropre en $+\infty$. On intègre par parties : $\int_\pi^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2} dt$.

Or $\left[\frac{-\cos t}{t} \right]_\pi^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi}$ et l'intégrale impropre $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge car elle converge absolument car $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$. D'où l'intégrale I_1 converge. Donc l'intégrale I converge.

4. Dans cette intégrale impropre en 0, on pose le changement de variable (de classe \mathcal{C}^1 et strictement monotone) $u = (2n+1)t$ ($du = (2n+1) dt$, t va de 0 à $\pi/2$, d'où u va de 0 à $(2n+1)\pi/2$) : $a_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$ d'après la question ??.
5. On intègre par parties (c'est possible car f' est continue) :

$$\int_0^{\pi/2} f(t) \sin(\lambda t) dt = \left[-\frac{1}{\lambda} f(t) \cos(\lambda t) \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi/2} f'(t) \cos(\lambda t) dt.$$

Or $-\frac{1}{\lambda} [f(\pi/2) \cos(\lambda\pi/2) - f(0)] \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$ car $\lambda \mapsto [f(\pi/2) \cos(\lambda\pi/2) - f(0)]$ est une fonction bornée.

Et $\frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi/2} f'(t) \cos(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$ car $\lambda \mapsto \int_0^{\pi/2} f'(t) \cos(\lambda t) dt$ est une fonction bornée.

En effet $\left| \int_0^{\pi/2} f'(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} |f'(t) \cos(\lambda t)| dt \leq \int_0^{\pi/2} |f'(t)| dt$.

6. $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin t}{t \sin t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^3/6}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t/6 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. Donc f est continue en 0. Ailleurs aussi.

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{1}{\sin h} - \frac{1}{h} - 0}{h} \stackrel{DL}{=} \frac{\frac{1}{1-h^2/6+h^2\varepsilon(h)} - 1}{h^2} = \frac{1}{6} + \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{6}. \text{ D'où } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = \frac{1}{6}.$$

Pour tout $t \neq 0$, $f'(t) = \frac{-\cos t}{\sin^2 t} + \frac{1}{t^2}$. D'où $f'(t) \stackrel{DL}{=} -\frac{1-t^2/2+t^2\varepsilon(t)}{(t-t^3/6+t^3\varepsilon(t))^2} + \frac{1}{t^2} = -\frac{1-t^2/2+t^2\varepsilon(t)}{t^2-t^4/3+t^4\varepsilon(t)} + \frac{1}{t^2} = \frac{-\frac{1-t^2/2+t^2\varepsilon(t)}{t^2} + 1}{t^2} = \frac{-(1-t^2/2+t^2/3+t^2\varepsilon(t)) + 1}{t^2} = \frac{1}{6} + \varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{6}$. D'où f' est continue en 0. Ailleurs aussi. Donc f est de classe \mathcal{C}^1 .

AUTRE MÉTHODE — on utilise le théorème de la limite de la dérivée : avec la même preuve que ci-dessus, la fonction f est continue en 0. Avec la même preuve que ci-dessus, $f'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{6}$. Donc la fonction f est dérivable en 0 et sa dérivée est continue en 0.

7. $b_n - a_n = \int_0^{\pi/2} f(t) \sin(2n+1)t dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ d'après les deux questions précédentes.

8. On a montré que : a_n tend vers I , b_n est constant et égal à $\frac{\pi}{2}$, $b_n - a_n$ tend vers 0. Donc $I = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 11. 1. Montrer que les intégrales généralisées

$$A = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt$$

sont convergentes.

2. Montrer que, pour chaque $n \geq 2$, le réel $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\dots+x^{n-1}} dx$ est égal à $\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^{1/n}(1-t^{1/n})}{1-t} dt$.
3. Soient $t \in]0, 1[$ et, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = t^x(1-t^x)$. Montrer que la fonction f est deux fois dérivable. Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et montrer que, pour tout $x \geq 0$, $|f''(x)| \leq 3(\ln t)^2$.
4. **▷ Réviser la formule de Taylor avec reste intégral.**

En déduire que, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\left| t^{1/n}(1-t^{1/n}) + \frac{1}{n} \ln t \right| \leq \frac{3(\ln t)^2}{2n^2}$$

5. Montrer que $\left| a_n - \frac{A}{n^2} \right| \leq \frac{3B}{2n^3}$. En déduire un équivalent de a_n .

1. L'intégrale $A = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$ est impropre en 0 et en 1 : soient $A_1 = \int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t-1} dt$ et $A_2 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$. L'intégrale A converge si, et seulement si, A_1 et A_2 convergent.

$\frac{\ln t}{t-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln t$ (qui ne change pas de signe), or $\int_0^{1/2} \ln t dt$ converge, d'où l'intégrale A_1 converge aussi.

L'intégrale A_2 converge car elle est faussement impropre en 1. En effet, $\frac{\ln t}{t-1} = \frac{\ln(1-u)}{-u}$ en posant $t = 1 - u$ pour se ramener en 0. Et $\frac{\ln(1-u)}{-u} = \frac{-u+o(u)}{-u} = -1 + o(1) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$.

De même, l'intégrale B converge si, et seulement si, les intégrales $B_1 = \int_0^{1/2} \frac{\ln^2 t}{1-t} dt$ et $B_2 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln^2 t}{1-t} dt$ convergent.

$\frac{\ln^2 t}{1-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln^2 t$. Or l'intégrale $\int_x^{1/2} \ln^2 t dt = [t \ln^2 t]_x^{1/2} - 2 \int_x^{1/2} \ln t dt$ car les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln^2 t$ sont de classe \mathcal{C}^1 .

Or $[t \ln^2 t]_x^{1/2}$ a une limite finie quand x tend vers 0 par croissances comparées. D'où l'intégrale B_1 est de même nature que $\int_0^{1/2} \ln t dt$, qui est convergente. Donc l'intégrale B_1 converge.

$B_2 = \int_0^{1/2} \frac{\ln^2(1-x)}{x} dx$. Or $\frac{\ln^2(1-x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ (qui ne change pas de signe) et $\int_0^1 x dx$ converge. Donc l'intégrale B_2 converge aussi.

2. L'intégrale $a_n = \int_0^1 \frac{(1-x)x^n}{1-x^n} dx$ est impropre en 1. On pose le changement de variable $t = x^n$ ($dt = nx^{n-1} dx$, x va de 0 à 1, d'où t va de 0 à 1) qui est bien de classe \mathcal{C}^1 et strictement monotone. D'où $a_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^{1/n}(1-t^{1/n})}{1-t} dt$.
3. Soit $t \in]0, 1[$.

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = t^x(1-t^x) = e^{x \ln t}(1 - e^{x \ln t})$, d'où $f(0) = 0$.

La fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} (car c'est un produit de fonctions deux fois dérivables) et $f'(x) = (1-2t^x)t^x \ln t$, d'où $f'(0) = -\ln t$.

Puis $f''(x) = t^x(1-4t^x)\ln^2 t$. Or, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq t^x = e^{x \ln t} \leq 1$ car $t \in]0, 1[$ et $x \geq 0$, d'où : $|f''(x)| \leq 3\ln^2 t$.

4. La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 (car sa dérivée seconde est continue), d'où (formule de Taylor avec reste intégral) :

$f(1/n) = f(0) + \frac{1}{n}f'(0) + \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x\right) f''(x) dx$. Donc, pour tout $t \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} \left| t^{1/n}(1-t^{1/n}) + \frac{1}{n} \ln t \right| &= \left| \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x\right) f''(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x\right) |f''(x)| dx \\ &\leq 3(\ln t)^2 \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x\right) dx \\ &\leq \frac{3(\ln t)^2}{2n^2}. \end{aligned}$$

5. On sait que $\left| t^{1/n}(1-t^{1/n}) + \frac{1}{n} \ln t \right| \leq \frac{3(\ln t)^2}{2n^2}$ pour tout $t \in]0, 1[$.

On divise par $1-t > 0$: $\left| \frac{t^{1/n}(1-t^{1/n})}{1-t} + \frac{1}{n} \frac{\ln t}{1-t} \right| \leq \frac{3}{2n^2} \frac{(\ln t)^2}{1-t}$ pour tout $t \in]0, 1[$.

On intègre (c'est possible car toutes ces intégrales convergent d'après les questions précédentes) :

$$\int_0^1 \left| \frac{t^{1/n}(1-t^{1/n})}{1-t} + \frac{1}{n} \frac{\ln t}{1-t} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{3}{2n^2} \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt.$$

D'où $\left| \int_0^1 \frac{t^{1/n}(1-t^{1/n})}{1-t} dt + \int_0^1 \frac{1}{n} \frac{\ln t}{1-t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{3}{2n^2} \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt$.

On divise par n : $\left| a_n - \frac{A}{n^2} \right| \leq \frac{3B}{2n^3}$. Puis par $\frac{A}{n^2}$ qui est strictement positif : $\left| \frac{a_n}{A/n^2} - 1 \right| \leq \frac{3B}{2An} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'où $\frac{a_n}{A/n^2} - 1$ tend vers 0 d'après le théorème des gendarmes. Autrement dit, $\frac{a_n}{A/n^2}$ tend vers 1. Donc $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{n^2}$.

Exercice 12. 1. Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} \ln^\alpha(t) dt$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Après une intégration par parties, déterminer un équivalent, quand x tend vers $+\infty$, de $\int_2^x \ln^\alpha(t) dt$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: $\frac{\ln^\alpha(t)}{1/t} = t \ln^\alpha(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ sans forme indéterminée si $\alpha \geq 0$ et par croissances comparées si $\alpha < 0$. D'où $\frac{1}{t} = o(\ln^\alpha(t))$ quand t tend vers $+\infty$. Or $\ln^\alpha(t)$ ne change pas de signe au voisinage de $+\infty$ et l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge. Donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \ln^\alpha(t) dt$ diverge aussi.
2. Soit $x \geq 2$. Les fonctions $u : t \mapsto \ln^\alpha(t)$ et $v : t \mapsto t$ sont de classe \mathcal{C}^1 , d'où $\int_2^x uv' = [uv]_2^x - \int_2^x u'v$. Donc

$$\int_2^x \ln^\alpha(t) dt = x \ln^\alpha(x) - 2 \ln^\alpha(2) - \alpha \int_2^x \ln^{\alpha-1}(t) dt.$$

Or $\ln^{\alpha-1}(t) = o(\ln^\alpha(t))$ quand t tend vers $+\infty$. De plus $\ln^\alpha(t)$ est positif au voisinage de $+\infty$. Enfin l'intégrale $\int_2^{+\infty} \ln^\alpha(t) dt$ diverge. Donc $\int_2^x \ln^{\alpha-1}(t) dt = o\left(\int_2^x \ln^\alpha(t) dt\right) \triangleright$ **proposition 15 du chapitre III**. Donc

$$\int_2^x \ln^\alpha(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln^\alpha(x).$$