

CORRIGÉ DE LA COLLE N° 03

Algèbre linéaire

1^{er} octobre 2025

Exercice 1 (Racines carrées d'une matrice). Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et f l'endomorphisme de E représenté, dans la base (e_1, e_2, e_3) , par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer, si elle existe, une base (u, v, w) de E dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose que g est un endomorphisme de E tel que $g \circ g = f$. On note N la matrice, dans la base (u, v, w) , de cet endomorphisme g . Montrer que

$$\exists (s, t, x, y) \in \mathbb{R}^4, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer toutes les matrices carrées N telles que $N^2 = B$ et en déduire toutes les matrices carrées M telles que $M^2 = A$.

1. Soit (u, v, w) une base de E : $[f]_{(u,v,w)} = B \iff \begin{cases} f(u) = 0_E & L_1 \\ f(v) = v & L_2 \\ f(w) = -3u + 4v + w & L_3 \end{cases}.$

(*) Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$:

$$L_1 \iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \dots \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff u = y(e_2 - 2e_3)$$

(**) De même, $L_2 \iff \exists y \in \mathbb{R}, v = y(e_2 - e_3)$.

(***) On choisit $u = e_2 - 2e_3$ et $v = e_2 - e_3$. Soit $w = xe_2 + ye_2 + ze_3$:

$$L_3 \iff \iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y - 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ z = -y \end{cases}.$$

On choisit $w = e_1$.

On vérifie que la famille $(u, v, w) = (e_2 - 2e_3, e_2 - e_3, e_1)$ est libre. On a ainsi obtenu une base dans laquelle la matrice de f est B .

2. On suppose que $g \circ g = f$.

Les endo. f et g commutent car $f \circ g = (g \circ g) \circ g = g \circ (g \circ g) = g \circ f$. D'où le *sev* $\text{Ker}(f)$ est stable par l'endo g ([▷ proposition 16 du chapitre II](#)). Or $u \in \text{Ker}(f)$ d'après L_1 . D'où le vecteur $g(u)$ appartient aussi à $\text{Ker}(f)$.

Or $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u)$ d'après (*) à la question précédente. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \lambda u$. D'où $0 = f(u) = g \circ g(u) = g(\lambda u) = \lambda g(u) = \lambda^2 u$, d'où $\lambda^2 = 0$, donc $\lambda = 0$. Finalement $g(u) = \lambda u = 0u = 0$, ce qui prouve la première colonne de la matrice N .

De même : les endo. $f - \text{id}$ et g commutent, d'où le *sev* $\text{Ker}(f - \text{id})$ est stable par l'endo g . Or $v \in \text{Ker}(f - \text{id})$ d'après (**), d'où $g(v) \in \text{Ker}(f - \text{id})$. Or $\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Vect}(v)$ d'après (**). Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(v) = \lambda v$. En notant x ce réel λ , on a prouvé la deuxième colonne de la matrice N .

La troisième colonne de la matrice N ne réclame aucune preuve.

3. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & sy \\ 0 & x^2 & xt + yt \\ 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix}$. D'où $N^2 = B \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ (x+y)t = 4 \\ sy = -3 \end{cases} \iff (x, y, s, t) \in \{(1, 1, 2, -3); (-1, -1, -2, 3)\}$.

Enfin $M^2 = A \iff g \circ g = f \iff N^2 = B$ en changeant de base. Or $N = P^{-1}MP$ d'après les formules de passage, en

notant $P = \begin{matrix} e_1 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_2 & \\ e_3 & \end{matrix}$ la matrice de passage de la vieille base (e_1, e_2, e_3) vers la nouvelle base (u, v, w) . Son

inverse est $P^{-1} = / \dots / = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$M^2 = A \iff M = \pm P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \pm / \dots /.$$

Exercice 2 (Un endomorphisme défini par une intégrale impropre).

- Justifier que l'ensemble E des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
- Soit une fonction $f \in E$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(f)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} f(u) du.$$

Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est bien définie, qu'elle est bornée, qu'elle est dérivable et que sa dérivée $\Phi(f)'$ est égale à $\Phi(f) - f$.

- Justifier que l'application $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E . Est-il injectif? surjectif?
- Déterminer toutes les fonctions f dans E telles que $\Phi(f) = f$.
- Pour quelles valeurs du réel λ l'équation $\Phi(f) = \lambda f$ possède-t-elle une solution non nulle dans E ?

1. L'ensemble E des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car la fonction nulle est continue et bornée et car toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée. En effet : si $\exists (M, N) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} |f(x)| \leq M \\ |g(x)| \leq N \end{cases}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, |\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq |\alpha| |f(x)| + |\beta| |g(x)| \leq |\alpha| M + |\beta| N$.

2. La fonction $\Phi(f)$ est bien définie car l'intégrale impropre $\int_x^{+\infty} e^{-u} f(u) du$ converge. En effet, $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in$

$\mathbb{R}, |f(t)| \leq M$. D'où $|e^{-u} f(u)| \leq M e^{-u}$ pour tout $u \geq 0$. Or l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-u} du$ converge. Donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-u} f(u) du$ converge absolument.

D'après l'inégalité triangulaire, $|\Phi(f)(x)| = \left| e^x \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t) dt \right| \leq e^x \int_0^{+\infty} |e^{-t} f(x+t)| dt \leq e^x M \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = M$ pour

tout réel x . Donc

la fonction $\Phi(f)$ est bornée.

$$\Phi(f)(x) = e^x \cdot \left(\int_7^{+\infty} e^{-u} f(u) du - \int_7^x e^{-u} f(u) du \right) = e^x \cdot (K - G(x)),$$

en notant $K = \int_7^{+\infty} e^{-u} f(u) du$ et $G : x \mapsto \int_7^x e^{-u} f(u) du$ une primitive de la fonction continue $u \mapsto e^{-u} f(u)$. Par

suite,

la fonction $\Phi(f)$ est dérivable

en tant que produit de fonctions dérivables. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)'(x) = e^x (K - G(x)) + e^x (0 - G'(x)) = \Phi(f)(x) - f(x)$$

car $G'(x) = e^{-x} f(x)$. Donc

$$\Phi(f)' = \Phi(f) - f.$$

3. D'une part, l'application Φ est linéaire; d'autre part, $\Phi(f)$ appartient à E pour tout $f \in E$. En effet, la fonction $\Phi(f)$ est continue car dérivable d'après la question précédente. Et elle est aussi bornée d'après la question précédente.

Donc

Φ est un endomorphisme de E .

Soit $f \in E$. Si la fonction $\Phi(f)$ est nulle, alors elle est constante et sa dérivée $\Phi(f)'$ est donc nulle. Or $\Phi(f)' = \Phi(f) - f$

d'après la question précédente. D'où $f = 0$. Donc $\text{Ker } \Phi = \{0_E\}$. D'où l'application linéaire

Φ est injective

. Mais

Φ n'est pas surjective

car la fonction $x \mapsto x$ si $x \in [0, 1]$, $2 - x$ si $x \in [1, 2]$, 0 sinon est continue et bornée, et

appartient donc à E . Mais n'est pas dérivable et n'appartient donc pas $\text{Im } \Phi$ d'après la question précédente.

4. ANALYSE : Soit $f \in E$. Si la fonction $\Phi(f) = f$, alors $\Phi(f)' = f'$. Or $\Phi(f)' = \Phi(f) - f$. D'où $f' = 0$. Donc la fonction f est constante

SYNTHÈSE : Si f est constante, alors $\exists K \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = K$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} K e^{-t} dt = K$. Donc $\Phi(f) = f$.

CONCLUSION :

$\Phi(f) = f$ si, et seulement si, la fonction f est constante.

5. Des deux questions précédentes, il résulte que 0 n'est pas une des ces valeurs et que 1 en est une. Soit maintenant un réel $\lambda \notin \{0; 1\}$. Si $\Phi(f) = \lambda f$, alors $\Phi(f)' = \lambda f'$ et, de $\Phi(f)' = \Phi(f) - f$, il résulte que $\lambda f' = (\lambda - 1)f$, d'où $f' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} f$ car $\lambda \neq 0$. On résout cette équation différentielle : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = K e^{\frac{\lambda - 1}{\lambda} x}$. Or $\lambda \neq 1$, donc : ou bien $K = 0$ (et alors $f = 0$), ou bien f n'est pas bornée (et alors $f \notin E$). Dans les deux cas, la valeur λ ne convient pas. Donc

l'équation $\Phi(f) = \lambda f$ possède une solution non nulle dans E ssi $\lambda = 1$.