

Colle 04 Réduction 2

AUBRIL Matthieu

Exercice 1. Soit $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes. Pour $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, on note $d(M)$ son indice de nilpotence.

1. Montrer que $\mathbb{C}[M]$ est de dimension $d(M)$
2. Montrer que $I_n + M$ est inversible, puis que $d(2M + M^2) = d(M)$.
3. Montrer que $M \mapsto 2M + M^2$ est injective sur $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. Est-elle bijective dans $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$?

Solution 1.

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\dim \mathbb{C}[A] = \deg \pi_A = d$. Car si $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \pi_A Q + R$ la division euclidienne de P par π_A . Comme $\chi_A(A) = 0$, on a $P(A) = R(A)$, donc $\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{d-1}[A]$. De plus si $a_0 I_n + \dots + a_{d-1} A^{d-1} = 0$, alors en posant $P = \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ est un polynôme annulateur de A degré $< d$; par définition du polynôme minimal, $P = 0$. La famille $(I_n, \dots, A^{d-1})$ est libre. On en déduit que $\dim \mathbb{C}[A] = d$. Par définition de l'indice de nilpotence, $d = d(M)$, ce qui termine la question.
2. On calcule $(I_n + M)(I_n - M + \dots + (-1)^{d-1} M^{d-1}) = I_n + (-1)^{d-1} M^d = I_n$. Donc $I_n + M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(2M + M^2)^k = 2^k M^k (I_n + \frac{M}{2})^k$.
On a montré que $I_n + \frac{M}{2}$ est inversible, donc $M^k = 0$ si et seulement si $(M + 2M)^k = 0$.
On en déduit $d(M) = d(2M + M^2)$.
3. Soit $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. On résout $2M + M^2 = A$ avec M nilpotente. On a $d(M) = d(A)$ d'après la question 2/.
Analyse Montrons que $M^k = P_k(A)$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$ de coefficient de terme de plus petit degré 2^{-k} .
Pour $k \geq d$, on prend $2^{-k} \times X^k$.
Si pour tout $j > k$, $M^j = P_j(A)$ avec P_j vérifiant les conditions, alors

$$\begin{aligned}
 A^k &= (2M + M^2)^k \\
 &= 2^k M^k + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} 2^{k-i} M^{k-i} M^{2i} \\
 &= 2^k M^k + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} 2^{k-i} M^{k+i} \\
 &= 2^k M^k + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} 2^{k-i} P_{k+i}(A)
 \end{aligned}$$

Et $P_k = 2^{-k} X^k - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} 2^{-i} P_{k+i}$ est bien un polynôme dont le terme de plus petit degré est $2^{-k} X^k$. Comme $A^d = 0$, on peut supposer que pour $k \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$, $\deg P_k \leq d-1$. On pose $P_0 = 1$.

Synthèse Si $A = 2M + M^2$, alors $M = P_1(A)$. On en déduit que $M \mapsto 2M + M^2$ est injective.

Pour la surjectivité : soit $M \in \mathcal{N}(\mathbb{C})$ d'indice de nilpotente d .

On considère l'application $\varphi : \mathbb{C}_{d-1}[A] \rightarrow \mathbb{C}_{d-1}[A]$, $M \mapsto 2M + M^2$.

On cherche P tel que $P(0) = 0$ et $2P + P^2 = X$ modulo X^d . On trouve les coefficients de P par récurrence. On retrouve P_1 et $P_1(A) = M$, ce qui montre la surjectivité de φ .

LEREMON Erwan

Exercice 2. On rappelle qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite nilpotente si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite idempotente si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = I_n$. Si M est idempotente on définit son indice d'idempotence par $ind(M) = \min\{p \in \mathbb{N}^* \mid M^p = I_n\}$.

1. Question de cours. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que $M^n = 0$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A + tB$ soit nilpotente pour $n + 1$ valeurs distinctes de t dans $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont nilpotentes.
3. Donner deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $\forall t \in \mathbb{C}$, $A + tB$ est idempotente, et $AB \neq BA$.
4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall t \in \mathbb{C}$, $A + tB$ est idempotente. Montrer que A est idempotente et B est nilpotente.
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\forall t \in \mathbb{C}$, $A + tB$ est idempotente. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.
6. Indépendant de ce qui précède. Déterminer $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ idempotente avec $ind(M) = 6$.

Solution 2.

1. Le plus simple est d'utiliser une trigonalisation, ce qui n'est pas au programme. Donc, si $M^p X \neq 0$, la famille $(X, \dots, M^{p-1} X)$ libre et conclure.
2. Les coefficients de $(A + tB)^n$ sont polynomiaux en t de degré $\leq n$, et possèdent $n + 1$ racines, donc sont identiquement nuls. $\forall t \in \mathbb{C}$, $(A + tB)^n = 0$. En particulier ($t = 0$), $A^n = 0$. De plus les coefficients de t^n sont ceux de B^n ($(A + tB)^n = A^n + t.. + \dots + t^{n-1} \dots + t^n B^n$), donc $B^n = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$ (j est le complexe tel que $j^3 = 1$) et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent : $(A + tB)^3 = I_n$ et $B^2 = 0$.
4. $\mathbb{C}$ n'est pas dénombrable, donc il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $Z \subset \mathbb{C}$ infini tels que $\forall t \in Z$, $\text{ind}(A + tB) = d$. On se fixe de tels d et Z . Alors $(A + tB)^d = A^d + \dots + t^d B^d = I_n$ pour une infinité de t donc par argument de polynôme, $A^d = I_n$ et $B^d = 0$.
5. Par un changement de base on se ramène à B triangulaire. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En disant par exemple que $\forall t \in \mathbb{C}$, $|\det(A + tB)| = 1$, on obtient $ce = 0$. Si $e = 0$, $B = 0$ donc c'est bon, et si $c = 0$, A est triangulaire, donc c'est bon aussi.
6. χ_M est à coefficients entiers et unitaire. On voudrait que ses racines complexes soient racines primitives 6èmes de l'unité. $(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3}) = X^2 - X + 1$ convient.
Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on veut $a + d = 1$ et $ad - bc = 1$. $a = 1$, $d = 0$, $b = 1$ et $c = -1$ conviennent.
Question supplémentaire (un peu répandu) : pour toute matrice idempotente $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $\text{ind}(M)$ divise 12.

ONTEIRAL-DIAZ Tom

Exercice 3. Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle et non inversible.

- a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{C}^n = \text{Im}(A^p) \oplus \text{Ker}(A^p)$.
- b) Montrer qu'il existe $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $A_0 \in \text{GL}_r(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ nilpotente tels que A est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} A_0 & 0 \\ \hline 0 & N \end{array} \right)$.
- c) On suppose qu'il existe $m \geq 2$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $A^m B = A$.
Montrer que $A^m B = A^{m-1} B A = \dots = B A^m$.

Solution 3.

- a) Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice A . On sait que $A \neq 0$ et que A est non inversible (donc u n'est pas l'endomorphisme nul et u n'est pas bijectif).

Considérons la suite de sous-espaces vectoriels suivantes pour $k \in \mathbb{N}$: $I_k = \text{Im}(u^k)$. On a $E = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq \{0\}$. Puisque E est de dimension finie n , la suite des dimensions $(\dim I_k)_{k \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0. Elle est stationnaire à partir d'un certain rang. L'application $\tilde{u}^p : \text{Im} u^p \rightarrow \text{Im} u_{2p} = \text{Im} u^p$, $x \mapsto u^p(x)$ est surjective entre deux espaces de même dimension. Elle est donc bijective. Son noyau vaut $\ker u^p \cap \text{Im} u^p = \{0\}$.

Par théorème du rang, la somme de leurs dimensions est $\dim E$, on conclut que :

$$\mathbb{C}^n = \text{Ker}(A^p) \oplus \text{Im}(A^p)$$

Si A était nilpotent, p serait son indice de nilpotence. Si A n'est pas nilpotent, p est le plus petit entier tel que $\text{rg}(A^p) = \text{rg}(A^{p+1})$.

- b) On utilise la décomposition de l'espace $E = \text{Im}(A^p) \oplus \text{Ker}(A^p)$ de la question (b). Dans une base adaptée à cette somme directe, les matrices de A et B s'écrivent :

$$A_{\text{bloc}} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{\text{bloc}} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

où A_0 est la restriction inversible de A à $\text{Im}(A^p)$ et N sa restriction nilpotente à $\text{Ker}(A^p)$.

1. Analyse de l'hypothèse $A^m B = A$ L'équation $A^m B = A$ implique, en se restreignant au sous-espace stable $\text{Ker}(A^p)$, que la partie nilpotente N doit vérifier :

$$N^m B_4 = N$$

Cette égalité matricielle a une conséquence forte sur les espaces images :

$$\text{Im}(N) = \text{Im}(N^m B_4) \subseteq \text{Im}(N^m)$$

Donc $\text{Im}(N) = \text{Im}(N^m)$, car l'inclusion inverse est vraie. Ainsi $N^m = 0$, puis $N = 0$.

2. Détermination des blocs de B Maintenant que l'on sait $N = 0$, l'équation $A^m B = A$ en blocs devient :

$$\begin{pmatrix} A_0^m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^m B_1 & A_0^m B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit par identification, puisque A_0 est inversible :

- $A_0^m B_1 = A_0 \implies B_1 = A_0^{-m+1}$
- $A_0^m B_2 = 0 \implies B_2 = 0$

La matrice B dans cette base a donc la forme $\begin{pmatrix} A_0^{-m+1} & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$.

3. Vérification de l'identité finale On calcule $A^{m-k} B A^k$ en utilisant les formes par blocs (avec $N = 0$) pour $k \in \{0, \dots, m\}$:

$$A^{m-k} B A^k = \begin{pmatrix} A_0^{m-k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{-m+1} & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^{1-k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien la forme par blocs de la matrice A . L'identité est donc prouvée.