

Exercice 5:

Merci à
Matthieu.

D: L'intégrale $D = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ est impropre en 0

On pose $x \in]0, 1]$. Les fonctions $u: t \mapsto \ln t$ et $v: t \mapsto 2\sqrt{t}$ sont de classe C^1 sur $]0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad \int_x^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt &= [2\sqrt{t} \ln t]_x^1 - \int_x^1 2\sqrt{t} \times \frac{1}{t} dt \\ &= -2\sqrt{x} \ln x - [4\sqrt{t}]_x^1 \\ &= -2\sqrt{x} \ln x - 4 + 4\sqrt{x} \\ &= 2\sqrt{x} (2 - \ln x) - 4 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -4$ par croissance comparées

D'où l'intégrale D converge et vaut -4 .

Qui - Autre méthode:

$$\left| \frac{\ln x}{x^{0,5}} \right| = \left| \frac{x^{0,1} \ln x}{x^{0,6}} \right|. \text{ Or } x^{0,1} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0,$$

$$\text{d'où } \exists T > 0, \forall x \in]0, T], |x^{0,1} \ln x| \leq 42.$$

$$\text{D'où } 0 \leq \left| \frac{\ln x}{x^{0,5}} \right| \leq 42 \times \frac{1}{x^{0,6}}.$$

Or l'intégral $\int_0^1 \frac{1}{x^{0,6}} dx$ cv car $0,6 < 1$.

Donc l'intégral $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ cv absolument.

F: L'intégrale $F = \int_7^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx$ est impropre en $+\infty$.

Si $x \geq 7$. Les fonctions $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = \ln t$ sont de classe C^1 .

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_7^x e^{-t} \ln t dt &= \left[e^{-t} \ln t \right]_7^x + \int_7^x e^{-t} \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= -e^{-x} \ln x + e^{-7} \ln 7 + \int_7^x \frac{e^{-t}}{t} dt \end{aligned}$$

Or $\forall t \leq 7, 0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$, qui ne change pas de signe sur $[7, +\infty]$.

$$\text{Et } \int_7^x e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_7^x = e^{-7} - e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-7}.$$

Donc l'intégrale $\int_7^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, donc l'intégrale $\int_7^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge

aussi.

De plus, $e^{-x} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc l'intégrale

$$\int_7^{+\infty} e^{-t} \ln t dt \text{ converge.}$$

Qui. Autre méthode:

$$|e^{-x} \ln x| = |e^{-x/2} \ln(x) e^{-x/2}| \text{ et } e^{-x/2} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où $\exists T > 7, \forall x \geq T, 0 \leq |e^{-x/2} \ln x| \leq 42$, d'où $|e^{-x} \ln x| \leq 42 e^{-x/2}$.

Or l'intégrale $\int_7^{+\infty} e^{-x/2} dx$ converge. D'où l'intégrale $\int_7^{+\infty} e^{-x/2} \ln x dx$

converge absolument.