Chapitre IV Diagonalisation & trigonalisation

Table des matières

IV.1 (Ne pas) être diagonalisable

Définition 1
On dit qu'une matrice carrée A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ est diagonale.

Exercice 2 — *1. Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser. Montrer que la matrice B n'est pas diagonalisable.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} & -1+3^n \\ \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} & -1+3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

3. Déterminer toutes les suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 3w_n \end{cases}$.

4. Résoudre le système d'équations différentielles $\begin{cases} x'(t) = y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 3z(t) \end{cases}$.

IV.2 Valeurs & vecteurs propres

Définition 3
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme.

(i) On dit qu'un vecteur $x \in E$ est un **vecteur propre** de u si x n'est pas nul et $u(x)$ est colinéaire à x : $x \neq 0_E$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x$.

(ii) On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$.

(iii) L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le **spectre** de u et est noté $\mathrm{Sp}(u)$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

(i) On dit qu'un vecteur colonne X est un **vecteur propre** de A si $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ A \cdot X = \lambda X$.
(ii) On dit qu'un scalaire λ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur colonne X tel que $X \neq 0$ et $A \cdot X = \lambda X$.
(iii) L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre** de A et est noté $\mathrm{Sp}(A)$.

Soient un vecteur $x \in E$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$: si $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$, alors x est un vecteur propre et λ est une valeur propre. On dit alors que x est un vecteur propre **associé à** la valeur propre λ.

Exemple 4 — Un spectre égal à $\mathbb{R}$ *: l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ infiniment dérivables est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension infinie. La dérivation $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \mapsto f'$ est un endomorphisme. Chaque réel λ est une valeur propre de D. En effet, la fonction*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$, non nulle et sa dérivée est $f' = \lambda f$. Cette fonction f est donc un vecteur propre de D, associé à la valeur propre λ. Donc $\mathrm{Sp}(D) = \mathbb{R}$.

Un spectre vide *: l'endomorphisme $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P(X) \mapsto X \cdot P(X)$ ne possède aucun vecteur propre (et donc aucune valeur propre).*

Si l'espace vectoriel E est de dimension finie n, alors on peut représenter, dans une base de E, l'endomorphisme u par une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ et le vecteur x par une vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. De

$$u(x) = \lambda x \iff A \cdot X = \lambda X,$$

on déduit que x est un vecteur propre de u si, et seulement si, X est un vecteur propre de A (avec la même valeur propre).

Définition 5
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $u : E \to E$ un endomorphisme.

On dit que l'endomorphisme u est **diagonalisable** s'il existe une base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ de E dont chaque vecteur est un vecteur propre de u : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{P = \begin{array}{c|c} & \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}} P^{-1}AP = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} u(\varepsilon_1) & u(\varepsilon_2) & \cdots & u(\varepsilon_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Si la matrice A représente l'endomorphisme u dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, alors : A est diagonalisable si, et seulement si, u est diagonalisable.

IV.3 Le polynôme caractéristique

Proposition-Définition 6
Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. La fonction

$$\mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto \det(xI_n - A)$$

est un polynôme noté χ_A et appelé le **polynôme caractéristique** de A :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(x) = \det(xI_n - A) = x^n - (\mathrm{tr}A)\, x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A.$$

Preuve — Les termes de degré n et $n-1$ de $\chi_A(x)$ sont ceux du produit

$$(x - a_{1,1}) \ldots (x - a_{n,n}),$$

c'est-à-dire x^n et $-(a_{1,1} + \cdots + a_{n,n})x^{n-1}$. Enfin le terme constant du polynôme χ_A est

$$\chi_A(0) = \det(0I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

□

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Preuve — Soit $A' = P^{-1}AP$, où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $xI_n - A' = xI_n - P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot (xI_n - A) \cdot P$,

d'où $\chi_{A'}(x) = \det(xI_n - A') = \det(xI_n - A) = \chi_A(x)$. □

Autrement dit, le polynôme caractéristique d'une matrice est un invariant de similitude comme son polynôme minimal (d'après l'exercice 31 du chapitre II) et son rang et aussi comme son déterminant et sa trace (qui sont d'ailleurs des coefficients de ce polynôme d'après la proposition 6).

Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, alors on peut définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u par

$$\chi_u(x) = \det(x\,\mathrm{id}_E - u).$$

Si la matrice A représente l'endomorphisme u dans une base $\mathcal{B}$, alors la matrice $xI_n - A$ représente l'endomorphisme $x\mathrm{id}_E - u$ dans la même base, donc $\chi_u = \chi_A$.

Le polynôme caractéristique d'une matrice sert à détecter ses valeurs propres :

Théorème 7 (*Le polynôme caractéristique détecte les valeurs propres*)
Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si, et seulement si, λ est une racine du polynôme caractéristique $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$:

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \det(\lambda I_n - A) = 0.$$

Autrement dit : si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $u : E \to E$ un endomorphisme, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0.$$

Preuve — $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si, et seulement si, il existe un vecteur colonne $X \neq 0$ tel que $A \cdot X = \lambda X$. Or

$$\begin{aligned}
\exists X \neq 0, \quad A \cdot X = \lambda X \quad &\iff \quad \exists X \neq 0, \quad (A \cdot X - \lambda X) = 0 \\
&\iff \quad \exists X \neq 0, \quad (A - \lambda I_n) \cdot X = 0 \\
&\iff \quad \text{l'endomorphisme } \lambda \mathrm{id}_E - u \text{ n'est pas injectif} \\
&\iff \quad \text{l'endomorphisme } \lambda \mathrm{id}_E - u \text{ n'est pas bijectif} \\
&\iff \quad \text{la matrice } \lambda I_n - A \text{ n'est pas inversible} \\
&\iff \quad \det(\lambda I_n - A) = 0
\end{aligned}$$

□

Exercice 8 —

1. *Montrer que la matrice* $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable dans* $\mathbb{C}$ *mais pas dans* $\mathbb{R}$.
2. *Proposer, pour chaque* $n \in \mathbb{N}^*$, *une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *qui n'est diagonalisable ni dans* $\mathbb{R}$ *ni dans* $\mathbb{C}$.

REMARQUE 9 (**réel ou complexe**) — *Si les coefficients d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$, de taille $n \times n$, sont tous réels, c'est-à-dire $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j [\![1, n]\!]$, $\overline{a_{ij}} = a_{ij}$, alors :*

1. *on peut décider que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la matrice A appartient alors à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont réelles ($\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$) et son spectre est parfois noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$;*
2. *on peut aussi décider que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la matrice A appartient alors à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, ses valeurs propres sont complexes ($\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{C}$) et son spectre est parfois noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$;*
3. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{R}$;
4. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \implies \overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

   Autrement dit : le spectre d'une matrice à coefficients réels est stable par conjugaison complexe.

   Preuve — *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors il existe un vecteur colonne $X = (x_j) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. D'où $\bar{D}\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$, en notant $\bar{A} = \left(\overline{a_{ij}}\right)$ et $\bar{X} = (\overline{x_j})$. Or $\bar{A} = A$ car tous les coefficients de la matrice A sont réels. D'où $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$. Donc $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A.* □

PROPOSITION 10
Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

1. Le spectre de A contient au plus n valeurs propres distinctes deux à deux.
2. Pour chaque valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on note m_λ la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_A. Si le polynôme caractéristique est scindé, alors
$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda \cdot \lambda \qquad \text{et} \qquad \det A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda}.$$
3. La matrice A et sa transposée ont le même polynôme caractéristique : $\chi_{A^T} = \chi_A$, donc le même spectre : $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^T)$.

Preuve —

1. Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique χ_A. Le nombre de racines d'un polynôme est inférieur ou égal à son degré. Or le degré du polynôme caractéristique est n.
2. Si le polynôme caractéristique est scindé, alors il est de la forme :
$$\chi_A(x) = (x - \lambda_1) \times \cdots \times (x - \lambda_n) = x^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x^{n-1} + \cdots + (-\lambda_1) \times \cdots \times (-\lambda_n).$$
Or $\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = x^n - (\mathrm{tr} A)\, x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$.
3. Soit $B = xI_n - A$. On sait que : $\det\left(B^T\right) = \det B$. Or $B^T = (xI_n - A)^T = xI_n - A^T$. Donc $\chi_{A^T} = \chi_A$.

□

IV.4 Les sous-espaces propres

DÉFINITION 11
Soient E un espace vectoriel, $u : E \to E$ un endomorphisme et λ une valeur propre de u. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{id}_E - u)$ est appelé **le sous-espace propre** de u associé à la valeur propre λ et est noté $E_\lambda(u)$.

Le sous-espace propre $\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{id}_E - u)$ est bien un sous-espace vectoriel de E (car c'est un noyau). Il contient tous les vecteurs $x \in E$ tels que $u(x) = \lambda\, x$, c'est-à-dire :

— le vecteur nul 0_E ;
— les vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ.

EXERCICE 12 — *Déterminer les sous-espaces propres des matrices* $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

REMARQUE 13 (**La valeur propre 0**) — *Soient E un espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme.*

1. *Si 0 est une valeur propre de u, alors le sep associé à la valeur propre 0 :*
   - *est le noyau de u : $\mathrm{Ker}\,(0\mathrm{id}_E - u) = \mathrm{Ker}\, u$;*
   - *contient un vecteur non nul, donc l'endomorphisme u n'est pas injectif.*
2. *Si 0 n'est pas une valeur propre de u, alors $\forall x \neq 0_E,\ u(x) \neq 0x$, d'où $\forall x \neq 0_E,\ u(x) \neq 0_E$, donc u est injectif.*
3. *On a donc montré que :*

$$u \text{ est injectif} \iff 0 \text{ n'est pas une valeur propre de } u.$$

4. *En particulier, si l'espace vectoriel E est de dimension finie, alors : u est bijectif $\iff 0 \notin \mathrm{Sp}(u)$. Autrement dit :*

$$\text{une matrice carrée } A \text{ est inversible} \iff 0 \notin \mathrm{Sp}(A).$$

Exercice 14 — *Soit $u : E \to E$ un endomorphisme bijectif. Comparer les spectres de u et de u^{-1}, les sous-espaces propres de u et de u^{-1}.*

Le polynôme caractéristique d'une matrice nous renseigne non seulement sur les valeurs propres mais aussi sur les dimensions des sous-espaces propres :

Proposition 15 (encadrement des dimensions des *sep*)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u : E \to E$ un endomorphisme :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad 1 \leq \dim \mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{id}_E - u) \leq m_\lambda$$

où m_λ est la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique.

Preuve — Soient d la dimension et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d)$ une base du sous-espace propre $\mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u)$.

λ est une valeur propre, d'où il existe un vecteur $x \neq 0_E$ dans ce sous-espace propre, donc $d \geq 1$.

On complète la base du sous-espace propre en une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d, e_{d+1}, \cdots, e_n)$ de l'espace vectoriel E. La matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overset{d}{\longleftrightarrow} & \overset{n-d}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \end{array}$$

et son polynôme caractéristique s'écrit $\chi_A(x) = (x - \lambda)^d \cdot Q(x)$, où Q est un polynôme de degré $n - d$. Donc $d \leq m_\lambda$. $\square$

Proposition 16
Soient E un espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme.

Si des valeurs propres sont distinctes deux à deux, alors les vecteurs propres associés sont libres.

Autrement dit : les sous-espaces propres sont en somme directe.

Preuve — Soient $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ distinctes deux à deux.

Par récurrence sur r :

* si $r = 1$, la famille (ε_1) est libre car $\varepsilon_1 \neq 0_E$ (un vecteur propre n'est jamais nul, par définition).

** supposons la famille $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{r-1})$ libre. On veut montrer que :

$$\alpha_1\varepsilon_1 + \cdots + \alpha_{r-1}\varepsilon_{r-1} + \alpha_r\varepsilon_r = 0_E \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_{r-1} = \alpha_r = 0.$$

Si	$\alpha_1\varepsilon_1 + \cdots + \alpha_{r-1}\varepsilon_{r-1} + \alpha_r\varepsilon_r$	$= 0_E$	(L_1)
alors	$u(\alpha_1\varepsilon_1 + \cdots + \alpha_{p-1}\varepsilon_{p-1} + \alpha_r\varepsilon_r)$	$= u(0_E)$	
d'où	$\alpha_1\lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \alpha_{r-1}\lambda_{r-1}\varepsilon_{r-1} + \alpha_r\lambda_r\varepsilon_r$	$= 0_E$	(L_2)
d'où	$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r)\varepsilon_1 + \cdots + \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)\varepsilon_{r-1}$	$= 0_E$	$(L_2 - \lambda_r L_1)$.

Or la famille $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{r-1})$ est libre, d'où $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r) = \cdots = \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r) = 0$.

Or les valeurs propres sont distinctes deux à deux, d'où $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$.

Mais alors, d'après (L_1), on a aussi $\alpha_r = 0$.

*** Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

Voici une autre preuve qui utilise le lemme II.35 des noyaux : si $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont des valeurs propres de u deux à deux distinctes, alors les polynômes $P_1 = \lambda_1 - X, \cdots, P_r = \lambda_r - X$ sont deux à deux premiers entre eux, d'où $\operatorname{Ker}(P_1(u) \circ \cdots \circ P_r(u)) = \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \cdots \oplus P_r(u)$. Cette somme est directe et c'est la somme des *sep*. □

Exercice 17 — *Soient r réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ distincts deux à deux. Montrer que*

si $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + \alpha_r e^{\lambda_r x} = 0,$

alors $\quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$

en utilisant la proposition précédente (voir deux autres méthodes dans le TD n° 2).

IV.5 Critères de diagonalisabilité

Proposition 18 (une condition **suffisante** pour qu'une matrice soit diagonalisable)
Soient $n \geq 2$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$:

$$A \text{ possède } n \text{ valeurs propres distinctes deux à deux } \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} A \text{ est diagonalisable.}$$

Preuve — Si A possède n valeurs propres distinctes deux à deux, alors il existe n vecteurs propres associés et ils sont libres. Or une famille libre de n vecteurs est une base de $\mathbb{K}^n$. Donc A est diagonalisable. La réciproque est fausse car la matrice I_n est diagonalisable (elle est diagonale). Or $\operatorname{Sp}(I_n) = \{1\}$. □

Théorème 19 (conditions **nécessaires et suffisantes** pour qu'une matrice soit diagonalisable)
Soient un espace vectoriel E de dimension finie et $u : E \to E$ un endomorphisme.

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable} \quad &\Longleftrightarrow \quad E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u) \\ &\Longleftrightarrow \quad \dim E = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u) \\ &\Longleftrightarrow \quad \chi_u \text{ est scindé} \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \operatorname{Sp}(u),\ \dim \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u) = m_\lambda \end{aligned}$$

Preuve —

* Si u est diagonalisable, alors il existe une base de E, formée de vecteurs propres de u. D'où les *se* sont supplémentaires. Réciproquement : si la somme directe des *sep* est égale à E, alors il existe une base de E adaptée à cette somme directe. Cette base est formée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable.

** On sait déjà que la somme des *sep* est directe grâce à la proposition 16. D'où :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u) \iff \dim E = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u).$$

*** D'une part $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m_\lambda \leq \deg \chi_u = \dim E$ et d'autre part (proposition 15) $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(u),\ \dim \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u) \leq m_\lambda$, d'où $\dim E = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u)$ si, et seulement si, $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m_\lambda = \dim E$ et $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(u),\ \dim \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u) = m_\lambda$.
Or $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m_\lambda = \dim E$ si, et seulement si, χ_u est scindé.

□

Exercice 20 — *La matrice* $E = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ?*

IV.6 Trigonalisation

Définition 21

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** s'il existe un matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Soient un espace vectoriel E de dimension finie et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire.

Remarque 22 — *1. Dans la définition, on peut choisir une matrice triangulaire inférieure au lieu de supérieure. Il suffit de remplacer la base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ par la base $(\varepsilon_n, \cdots, \varepsilon_1)$, c'est-à-dire d'inverser l'ordre des vecteurs, autrement dit d'inverser l'ordre des colonnes de P.*

2. Si A est trigonalisable, alors les scalaires $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sur la diagonale sont des valeurs propres de A car le polynôme caractéristique de A est $(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$. (C'est un déterminant triangulaire.)

Théorème 23

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Preuve — On démontre la propriété par récurrence sur la taille n de la matrice :

— Si $n = 1$, alors la matrice $A = (a_{11})$ est déjà triangulaire.

— Supposons que la propriété est vraie pour toutes les matrices de taille $(n-1) \times (n-1)$.

La matrice A représente un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$. Le polynôme caractéristique P_A possède au moins une racine $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ car il est scindé. Soit $\varepsilon_1 \in E$ un vecteur propre de u, associé à cette valeur propre λ_1. On complète pour obtenir une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ de E. Dans cette base, la matrice de u est de la forme

$$A' = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

où Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$. Le bloc B est une matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ et son polynôme caractéristique est aussi scindé car $P_A(X) = P_{A'}(X) = (X - \lambda_1)P_B(X)$ est scindé. D'où B est trigonalisable : il existe $R \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que la matrice $R^{-1}BR$ est triangulaire. La matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ est inversible et } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

D'où

$$S^{-1}A'S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1}BR & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

est triangulaire. Soit $P = QS$: la matrice $P^{-1}AP$ est triangulaire.

□

Corollaire 24

Toute matrice de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ est trigonalisable

Preuve — Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$. Le polynôme caractéristique de A appartient à $\mathbb{C}[X]$. Or tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, d'après le théorème de D'Alembert-Gauss. Donc A est trigonalisable. □

Exercice 25 — *Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Montrer qu'il y a équivalence entre :*

(i) la matrice A est nilpotente ;

(ii) le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = X^n$;

(iii) la matrice A est trigonalisable, avec seulement des zéros sur la diagonale.

IV.7 Le théorème de Cayley & Hamilton

Théorème 26 (de Cayley & Hamilton)
Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est un polynôme annulateur de cette matrice :

$$\chi_A(A) = 0.$$

Preuve — La matrice A représente, dans une base d'un $\mathbb{K}-ev$ E de dimension n, un endomorphisme u. Le polynôme caractéristique de u est aussi le polynôme caractéristique de A et on veut montrer que $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, autrement dit : $\forall x \in E,\ \chi_u(u)(x) = 0_E$.

Soit x un vecteur non nul de E. La famille $(x, u(x), \cdots, u^n(x))$ est liée car elle contient $n+1$ vecteurs d'un *ev* E de dimension n. D'où il existe un plus grand entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(x, u(x), \cdots, u^p(x))$ est libre. Et cet entier p est strictement inférieur à n.

Il existe donc $p+2$ scalaires α_0, α_1, $\cdots$, α_{p+1} de $\mathbb{K}$, non tous nuls, tels que

$$\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \cdots + \alpha_p u^p(x) + \alpha_{p+1} u^{p+1}(x) = 0_E.$$

De plus $\alpha_{p+1} \neq 0$, sinon la famille $(x, u(x), \cdots, u_p(x))$ serait liée. D'où, en divisant par α_{p+1} : il existe $p+1$ scalaires a_0, a_1, $\cdots$, a_p de $\mathbb{K}$ tels que

$$a_0 x + a_1 u(x) + \cdots a_p u^p(x) + u^{p+1}(x) = 0_E.$$

Soit F le *sev* de E engendré par la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \cdots, u_p(x))$. Ce *sev* F est stable par u. La famille de vecteurs $\mathcal{B}$ est une base de F et la matrice de la restriction $u\,|_F$ dans cette base est

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -a_{p-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_p \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice compagnon (voir T.D.) du polynôme $Q(X) = X^{p+1} + a_p X^p + \cdots + a_1 X + a_0$, d'où $\det(\lambda I_{p+1} - A_{11}) = Q(\lambda)$.

Si on complète la base $\mathcal{B}$ de F en une base $\mathcal{C}$ de E, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{array}{c c} & \overset{p+1}{\longleftrightarrow} \\ p+1 \updownarrow & \left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline 0 & A_{22} \end{array}\right) \end{array}$$

est une matrice triangulaire par blocs. D'où le polynôme caractéristique de u est

$$\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = \det(\lambda I_{p+1} - A_{11}) \cdot \det(\lambda I_{n-p-1} - A_{22}) = Q(\lambda) \cdot \det(\lambda I_{n-p-1} - A_{22}).$$

Or $Q(u)(x) = 0_E$, d'après la dernière colonne de la matrice A_{11}. Donc $\chi_u(u)(x) = 0_E$.

Ceci est valable pour tout vecteur x non nul de E. Et aussi pour le vecteur nul car $\chi_u(u)(0_E) = 0_E$.

D'où : $\forall x \in E,\ \chi_u(u)(x) = 0_E$. Donc $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

□

Corollaire 27
Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

Exercice 28 — *Déterminer le polynôme minimal de la matrice E de l'exercice 20.*

IV.8 Polynômes annulateurs

Si $x \in E$ est un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\begin{aligned} u(x) = \lambda x \quad &\Longrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = \lambda^k x \\ &\Longrightarrow \quad \forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = P(\lambda)x. \end{aligned}$$

D'où le même vecteur x est un vecteur propre de $P(u)$, associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

Proposition 29
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$. Si λ est une valeur propre de u, alors λ est une racine de P :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} P(\lambda) = 0.$$

Autrement dit : **le spectre est inclus dans l'ensemble des racines**.

Preuve — Si $\exists x \neq 0_E,\ u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$. Or $P(u) = 0$. D'où $P(u)(x) = 0_E$. Donc $P(\lambda) = 0$ car $x \neq 0_E$. La réciproque est fausse, voici un contre-exemple : le polynôme $(X-1)(X-7)$ est un polynôme annulateur de la matrice identité I_n mais 7 n'est pas une valeur propre de I_n. □

Dans le cas du polynôme minimal, cette inclusion est même une égalité :

Proposition 30
Le spectre de u est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal (qui a donc les mêmes racines que le polynôme caractéristique).

Preuve — Le polynôme μ_u est annulateur de u, d'où les valeurs propres de u sont des racines de μ_u. Réciproquement : si α est une racine de μ_u, alors on peut écrire $\mu_u(X) = (X-\alpha) \cdot N(X)$. Par minimalité, l'endomorphisme $N(u)$ est non nul. Il existe donc un vecteur $z \in E$ tel que $x = N(u)(z) \neq 0_E$. Or

$$(u - \alpha \mathrm{id}_E)(x) = (u - \alpha \mathrm{id}_E) \circ N(u)(z) = \mu_u(u)(z) = 0.$$

Donc α est une valeur propre de u.

Voici une seconde preuve qui utilise le théorème de Cayley & Hamilton : le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de μ_u car le polynôme minimal est annulateur de u. Réciproquement, le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique d'après le corollaire 27, d'où l'ensemble des racines de μ_u est inclus dans l'ensemble des racines de χ_u, c'est-à-dire dans le spectre de u. □

Théorème 31
Une matrice A est :

(i) trigonalisable si, et seulement si, elle possède un polynôme annulateur scindé ;
(ii) diagonalisable si, et seulement si, elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples ;
(iii) diagonalisable si, et seulement si, le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp} A} (X - \lambda)$ est annulateur de la matrice A.

Preuve —

(i) Si A est trigonalisable, alors le polynôme caractéristique de A est scindé d'après le théorème 23. Or le polynôme caractéristique est aussi annulateur de A d'après le théorème de Cayley & Hamilton. Donc la matrice A possède un polynôme annulateur scindé.

Réciproquement : si A possède un polynôme annulateur P scindé, alors le polynôme minimal μ_A est aussi scindé car il divise P. D'où le polynôme caractéristique est aussi scindé car il a les mêmes racines que le polynôme minimal, dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{K}$. Donc A est trigonalisable d'après le théorème 23.

(ii) et (iii) Si un polynôme $Q = (X - \mu_1) \cdots (X - \mu_s)$ scindé à racines simples est annulateur de u, alors (lemme des noyaux)

$$E = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathrm{Ker}\,(\mu_k \mathrm{id}_E - u)$$

car les polynômes $X - \mu_k$ sont premiers entre eux deux à deux. Pour chaque $k \in [\![1, s]\!]$, ou bien $\mathrm{Ker}\,(\mu_k \mathrm{Id}_E - u) = \{0_E\}$, ou bien μ_k est une valeur propre de u. Soit $I = \{k \in [\![1, s]\!] \mid \mu_k \in \mathrm{Sp}(u)\}$. Alors $E = \bigoplus_{k \in I} \mathrm{Ker}\,(\mu_k \mathrm{Id}_E - u) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{id}_E - u)$. Donc u est diagonalisable.

Réciproquement : si u est diagonalisable, alors $E = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(\lambda_k \mathrm{id}_E - u)$, en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres de u. D'où tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_1 + \cdots + x_r$, chaque vecteur x_k étant un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k. Donc le polynôme $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r)$ est un polynôme annulateur de u car $P(u)(x) = \sum_{k=1}^{r} (u - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_r \mathrm{id}_E)(x_k)$ et chaque terme de la somme est nul car $\forall k \in [\![1, r]\!], \quad u(x_k) = \lambda_k x_k$.

□

Exercice 32 — *Soient $n \geq 2$. Montrer que la matrice*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}).$$

est diagonalisable, déterminer son spectre et ses sous-espaces propres.

IV.9 Stabilité

Proposition 33
Soient un espace vectoriel E, un endomorphisme $u : E \to E$ et un vecteur $a \in E$ non nul.

La droite $\mathrm{Vect}(a)$ est stable par u si, et seulement si, a est un vecteur propre de u.

Preuve — Si la droite $\mathrm{Vect}(a)$ est stable par u, alors $u(a) \in \mathrm{Vect}(a)$, d'où $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(a) = \lambda a$. Or $a \neq 0_E$. Donc a est un vecteur propre.

Si a est un vecteur propre, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(a) = \lambda a$. Chaque vecteur x de la droite $\mathrm{Vect}(a)$ s'écrit αa, où $\alpha \in \mathbb{K}$. D'où $u(x) = u(\alpha a) = \alpha u(a) = \alpha \lambda a$ appartient aussi à $\mathrm{Vect}(a)$. Donc $\mathrm{Vect}(a)$ est stable par u. □

Exercice 34 — *Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe au moins une droite ou un plan stable par u.*

Proposition 35
Soient $u : E \to E$ et $v : E \to E$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Si u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$), alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Preuve — Si λ est une valeur propre de u, alors le noyau de l'endomorphisme $u' = \lambda \mathrm{id}_E - u$ est le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ. Or u' commute avec v, donc $\mathrm{Ker}\, u'$ est stable par v, d'après la proposition II.16. □

En particulier, les sous-espaces propres de u sont stables par u. Pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, la restriction de u au sous-espace propre $F = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u)$ est l'homothétie $u|_F = \lambda \mathrm{id}_F$.

Proposition 36
Soient un espace vectoriel E de dimension finie, un endomorphisme $u : E \to E$ et un sous-espace vectoriel F stable par u. Le polynôme caractéristique $P_{u|_F}$ de l'endomorphisme induit $u|_F$ divise le polynôme

caractéristique χ_u de u.

Preuve — Soit G un supplémentaire de F. Dans une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$, la matrice A de u est triangulaire par blocs :

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Son polynôme caractéristique est donc $P_A(x) = \det(xI_{d_1+d_2} - A) = \det(xI_{d_1} - A_{11}) \times \det(xI_{d_2} - A_{22})$. Or $P_A(x) = P_u(x)$ et $\det(xI_{d_1} - A_{11}) = P_{u|_F}(x)$. □

Proposition-Définition 37
Si le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est scindé, alors :

- le **sous-espace caractéristique** de A associé à chaque valeur propre λ est $C_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A)^{m_\lambda}$, où m_λ est la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique ;
- les sous-espaces caractéristiques sont supplémentaires, stables par A et de dimensions $\dim C_\lambda = m_\lambda$.

Preuve — Soit u l'endomorphisme représenté, dans une base d'un *ev* E, par la matrice A. Le polynôme caractéristique de A étant scindé, $\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$. Le polynôme χ_u étant annulateur de u, $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id} - u)^{m_\lambda}$ d'après le lemme des noyaux. Les *sec* sont donc supplémentaires.

Les matrices A et $(\lambda I_n - A)^{m_\lambda}$ commutent, d'où le noyau C_λ de $(\lambda \mathrm{id} - u)^{m_\lambda}$ est stable par u, d'après la proposition II.16.

De plus, l'endomorphisme induit $(u - \lambda \mathrm{id})|_{C_\lambda}$ est nilpotent car $\forall x \in C_\lambda,\ (u - \lambda \mathrm{id})^{m_\lambda}(x) = 0_E$. D'où son polynôme caractéristique est $X^{\dim C_\lambda}$ d'après l'exercice 25. Par suite, le polynôme caractéristique de $u|_{C_\lambda}$ est $(X - \lambda)^{\dim C_\lambda}$ car, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\det\left(x\mathrm{id}_{C_\lambda} - u|_{C_\lambda}\right) = \det\left((x - \lambda)\mathrm{id}_{C_\lambda} - (u - \lambda \mathrm{id})|_{C_\lambda}\right)$. Et ce polynôme caractéristique divise le polynôme caractéristique de u d'après la proposition 36, donc $\dim C_\lambda \leq m_\lambda$. Or $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim C_\lambda = n$ car les *sec* sont supplémentaires.

Et $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda = n$ car le polynôme caractéristique est de degré n et est supposé scindé. Donc $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim C_\lambda = m_\lambda$. □

Remarque 38 — *Les* sep E_λ *sont toujours en somme directe et les* sec C_λ *sont toujours supplémentaires.* $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ E_\lambda \subset C_\lambda$. *La matrice A est diagonalisable si, et seulement si,* $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ E_\lambda = C_\lambda$ *si, et seulement si, les* sep *sont supplémentaires.*

Exercice 39 — *Montrer que, si le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est scindé, alors A est semblable à une matrice diagonale par blocs*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \overset{m_1}{\longleftrightarrow} & \overset{m_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{m_r}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \updownarrow \\ m_2 \updownarrow \\ \vdots \\ m_r \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_r \end{pmatrix} \end{array}$$

telle que :

- *le nombre de blocs est le nombre $r = \operatorname{card} \mathrm{Sp}(A)$ de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$;*
- *la taille de chaque bloc B_k est la multiplicité m_k de la valeur propre λ_k ;*
- *chaque bloc B_k est la somme de $\lambda_k I_{m_k}$ et d'une matrice nilpotente N_k.*

PROPOSITION 40
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Si u est diagonalisable et F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $u|_F$ est aussi diagonalisable.

Preuve — Il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$ car u est diagonalisable.
D'où $\forall x \in E,\ P(u)(x) = 0_E$. D'où $\forall x \in F,\ P(u)(x) = 0_E$. D'où $\forall x \in F,\ P(u|_F)(x) = 0_F$.
D'où le polynôme P, scindé à racines simples, est un polynôme annulateur de $u|_F$. Donc $u|_F$ est diagonalisable. □

EXERCICE 41 — *Montrer qu'une matrice diagonale par blocs est diagonalisable si, et seulement si, chaque bloc est diagonalisable.*