

Exercice 6: intégrale

* $A = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ est impropre en $+\infty$.

On pose: $u^2 = x$

Et: $u \mapsto u^2$ est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$.

Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^t e^{-\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{t}} u e^{-u} du$$

Les fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto -e^{-u}$ sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{Donc: } \int_0^{\sqrt{t}} u e^{-u} du &= \left[-u e^{-u} \right]_0^{\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u} du \\ &= -\sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} + \left[-e^{-u} \right]_0^{\sqrt{t}} \\ &= -\sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} - e^{-\sqrt{t}} + 1 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1$$

$$\text{Donc: } \int_0^t e^{-\sqrt{x}} dx \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 2$$

Donc: l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ converge et $A = 2$.

et par ailleurs car le discriminant du polynôme $x^2 + 2x + 2$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 1 < 0$.

Donc:

L'intégrale

* $B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

$$B = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

convergent.

On pose:

$$F = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \quad \text{et} \quad G = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

Montrons que l'intégrale F converge en $-\infty$ et l'intégrale G converge en $+\infty$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{(t+1)^2 + 1}$$

Donc: Soit $y \in \mathbb{R}^-$,

$$\int_y^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_y^0 \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \left[\text{Arctan}(x+1) \right]_y^0 = \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(y+1)$$

Merci à Alexis.

D'où l'intégrale

$$D' \text{ où : } \int_y^0 \frac{dx}{x^2+2x+1} = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}(y+1) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

Donc : l'intégrale F converge et $F = \frac{3\pi}{4}$

De plus : soit $y \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{dx}{x^2+2x+1} &= \int_0^y \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \left[\text{Arctan}(x+1) \right]_0^y \\ &= \text{Arctan}(y+1) - \text{Arctan}(1) \\ &\xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Donc : l'intégrale G converge et $G = \frac{\pi}{4}$.

Donc : l'intégrale B converge et $B = F + G = \pi$

fin

* $C = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt$ est impropre en 1.

les fonctions $t \mapsto \ln(1-t)$ et $t \mapsto -\frac{1}{1+t}$ sont de classe C^1 sur $[0; 1[$.

Soit $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt &= \left[\frac{-\ln(1-t)}{1+t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{(1-t)} \times \frac{1}{(1+t)} dt \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{1+x} - \int_0^x \frac{1/2}{1+t} + \frac{1/2}{1-t} dt \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{1+x} - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1+t} dt - \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{1+x} - \frac{1}{2} \left[\ln(1+t) \right]_0^x - \frac{1}{2} \left[-\ln(1-t) \right]_0^x \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{1+x} - \frac{1}{2} \ln(1+x) + \frac{1}{2} \ln(1-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt &= -\frac{\ln(1-x)}{1+x} - \frac{1}{2} \ln(1+x) + \frac{1}{2} \ln(1-x) \\ &= \ln(1-x) \left(-\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \ln(1-x) \left(\frac{x-1}{2x+2} - \frac{1}{2} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} \right) \end{aligned}$$

$$= \ln(1-x) \times \left(\frac{x-1}{2x+2} \right) - \frac{1}{2} \ln(1+x)$$

$$a_n: \frac{x-1}{2x+2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$$

$$\text{Donc: } \ln(1-x) \times \left(\frac{x-1}{2x+2} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0 \text{ par croissances comparées}$$

Où :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\frac{\ln(2)}{2}$$

$$\text{Donc: l'intégrale } \mathcal{C} \text{ converge et } \mathcal{C} = -\frac{\ln(2)}{2}.$$