

Nesci à Arthur

3) l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ est imp propre à $+\infty$

Soit $x \in [1, +\infty[$

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \int_1^x \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \frac{dt}{1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}} \\ &= \int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + o\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) \right) dt \\ &= \int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt - \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t} dt + o\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right) dt \end{aligned}$$

On les fonctions $\begin{cases} u: t \mapsto -\cos t \\ v: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$ sont C^1

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \int_1^x u'v = [uv]_1^x - \int_1^x uv' \\ &= -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos 1}{1} + \int_1^x \frac{+\cos(t)}{2\sqrt{t}t} dt \end{aligned}$$

On $\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ $x \rightarrow +\infty$

l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}t} dt$ converge

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ converge

Oui

Hyp

$\frac{\sin^2 x}{x} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right) \sim \frac{\sin^2 x}{x}$ $x \rightarrow +\infty$

qui ne change

pas de signe

Démonstration que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ diverge

Soit $x \in [1, +\infty[$

$$\int_1^x \frac{\cos^2(t)}{t} dt + \int_1^x \frac{\sin^2(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{dt}{t} \rightarrow$$

Or l'intégrale $A = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge

Et

$$\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt - \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t} dt = \int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt$$

Les fonctions $\begin{cases} u: t \rightarrow \frac{\sin 2t}{2} \\ v: t \rightarrow \frac{1}{t} \end{cases}$ sont C^1

D'où

$$\int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt = \int_1^x u'v = [uv]_1^x - \int_1^x uv' = \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin 2}{2} + \int_1^x \frac{\sin 2t}{t^2} dt$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t^2} dt$ est absolument convergente
d'où l'intégrale $B = \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ est convergente

D'où les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t} dt$ sont divergentes car si elles étaient toutes deux convergentes l'intégrale A le serait aussi et si l'une d'elles seulement était divergente l'intégrale B serait divergente.

D'où l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ est divergente

oui