

CORRIGÉ DU T.D. A

Arithmétique, polynômes & structures

29 septembre 2025

Exercice 1. Soit l'intervalle $I =]-1, +1[$. Pour chaque $(x, y) \in I^2$, on définit le réel

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in I^2$, $x * y \in I$.
2. Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.
3. Soit $a \in [0, 1[$. Vérifier que $A = [a, 1[$ est stable par la loi $*$.

L'ensemble $(A, *)$ est-il un sous-groupe de $(I, *)$?

4. Montrer que la fonction $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow I$ est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque th^{-1} .
5. Montrer que th est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe $(I, *)$.

1. Soit $(x, y) \in I^2$:

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{1+xy} < 1 &\Leftrightarrow x+y < 1+xy \text{ en multipliant par } 1+xy > 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < 1-x-y+xy. \end{aligned}$$

Or $1-x-y+xy = (1-x) \cdot (1-y) > 0$. D'où $\frac{x+y}{1+xy} < 1$ et, de même, $-1 \leq \frac{x+y}{1+xy}$. Donc

$*$ est une loi de composition interne

AUTRE MÉTHODE — Soit $x \in I$. On considère la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{x+y}{1+xy}$. L'application f est dérivable et $\forall y \in]-1, +1[$, $f'(y) = \frac{1+xy-x^2-xy}{(1+xy)^2} = \frac{1-x^2}{(1+xy)^2} > 0$. L'application f est continue et strictement croissante, d'où $f([-1, 1]) = [f(-1), f(1)]$. Or $f(-1) = \frac{x-1}{1-x} = -1$ et $f(1) = \frac{x+1}{1+x} = 1$. Donc $f(I) \subset I$ pour tout $x \in I$.

2. 0 est l'élément neutre de $*$ car, pour tout $x \in I$, $x * 0 = \frac{x+0}{1+x \cdot 0} = x$.

Tout élément x de I possède un inverse car $-x \in I$ et $x * (-x) = \frac{x-x}{1+x(-x)} = 0$. D'où $-x$ est l'inverse de x .

Enfin la loi $*$ est associative car, pour tout $(x, y, z) \in I^3$:

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= \frac{x * y + z}{1 + (x * y)z} \\ &= \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy}z} \\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \\ &= \frac{x(1+yz)+y+z}{1+yz} \\ &= \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \frac{y+z}{1+yz}} \\ &= \frac{x + y * z}{1 + x(y * z)} \\ (x * y) * z &= x * (y * z) \end{aligned}$$

Donc $(I, *)$ est un groupe commutatif

3. Nous avons vu que l'application $f : y \mapsto x * y$ est croissante sur $[-1, 1]$.

D'où $\forall (x, y) \in A^2, \frac{x+y}{1+xy} \geq \frac{x+0}{1+0x} \geq x \geq a$. Donc

A est stable par $*$

Non, l'ensemble $(A, *)$ n'est pas un sous-groupe de $(I, *)$ car il existe $x \in A$ tel que $-x \notin A$.

4. La fonction th est dérivable car c'est le quotient de deux fonctions dérivables et car son dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, \text{th}'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$. Donc

la fonction th est strictement croissante

$\text{th}(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +1$ et, parce que la fonction th est impaire, $\text{th}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$

PREMIÈRE MÉTHODE — La fonction $\mathbb{R} \rightarrow I, x \mapsto \text{th}(x)$ est bijective d'après la question 4 : injective car elle est strictement monotone et surjective car $\text{th}(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} \text{th}, \lim_{+\infty} \text{th}[= I$ car th est strictement croissante et continue. La deuxième méthode sera meilleure car elle permettra non seulement de montrer que th est bijective mais aussi de déterminer l'expression de th^{-1} .

DEUXIÈME MÉTHODE — Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} y = \text{th}(x) &\iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \\ &\iff e^{2x} - 1 = y \cdot (e^{2x} + 1) \\ &\iff e^{2x} \cdot (1 - y) = 1 + y \\ &\iff e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} \quad \text{car } y \neq 1 \\ &\iff 2x = \ln \frac{1 + y}{1 - y} \quad \text{car } 1 + y > 0 \text{ et } 1 - y > 0 \\ &\iff x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}. \end{aligned}$$

Donc th est bijective et $\text{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$ pour tout $y \in]-1, 1[$.

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: d'après la question précédente, les réels $\text{th}(x)$ et $\text{th}(y)$ appartiennent à I . De plus

$$\begin{aligned} \text{th}(x) * \text{th}(y) &= \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}}{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}} \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^y - e^{-y})(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})} \\ &= \frac{(e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y}) + (e^{y+x} - e^{-y+x} + e^{y-x} - e^{-y-x})}{(e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} + e^{-x-y}) + (e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} + e^{-x-y})} \\ &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{e^{x+y} + e^{-x-y}} \\ &= \text{th}(x + y) \end{aligned}$$

Donc th est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe $(I, *)$. Et c'est un isomorphisme car th est bijective.

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif non réduit à $\{0_A\}$, soit $x \in A$. On dit que x est *nilpotent* si

$$\exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0_A.$$

Montrer que :

- si x est nilpotent, alors x n'est pas inversible mais $1_A - x$ est inversible.
- l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A .

1. Soient $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x^n = 0_A$.

Montrons que x n'est pas inversible. Par l'absurde : si x est inversible, alors $\exists y \in A$, $x \times y = y \times x = 1_A$. D'où, en élevant à la puissance n : $x^n \times y^n = 1_A$ car l'anneau est supposé commutatif. Par suite $0_A y^n = 1_A$. C'est absurde.

Montrons que $1_A - x$ est inversible. Par un télescope : $(1_A - x) \times (1_A + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = 1_A - x^n = 1_A$. Donc $1_A - x$ est inversible et son inverse est $1_A + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$.

2. Soit I l'ensemble des éléments nilpotents de A .

D'une part $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ car $0_A \in I$ et $\forall (x, y) \in I^2$, $x - y \in I$. En effet, si $x^{n_1} = 0_A$ et $y^{n_2} = 0_A$, alors $(x - y)^{n_1+n_2} = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} (-1)^{n_1+n_2-k} \binom{n_1+n_2}{k} x^k \times y^{n_1+n_2-k}$ car la loi $\times$ est commutative par hypothèse. Et chaque terme de cette somme est nul car la puissance k est supérieure ou égale à n_1 ou la puissance $n_1 + n_2 - k$ est supérieure ou égale à n_2 .

D'autre part, si $i \in I$, alors il existe n tel que $i^n = 0_A$. Pour tout $a \in A$, $i \times a \in I$ car $0_A = i^n \times a^n = (i \times a)^n$ car la loi $\times$ est commutative par hypothèse.

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif. Si I est un idéal de A , alors on note

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A et que $I \subset \sqrt{I}$.
2. Soient I et J deux idéaux de A . Montrer que :
 - (a) $I \cap J$ est un idéal de A ;
 - (b) $I \subset J \implies \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$;
 - (c) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
3. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

1. Soit $i \in I$. Alors $i^1 \in I$, d'où $i \in \sqrt{I}$. Donc $I \subset \sqrt{I}$.

D'une part $(\sqrt{I}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$. En effet $\sqrt{I}$ n'est pas vide car $0_A \in I \subset \sqrt{I}$. Et $\forall (x, y) \in \sqrt{I}^2$, $x - y \in \sqrt{I}$. En effet, si $x^{n_1} \in I$ et $y^{n_2} \in I$, alors $(x - y)^{n_1+n_2} = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} (-1)^{n_1+n_2-k} \binom{n_1+n_2}{k} x^k \times y^{n_1+n_2-k}$ car la loi $\times$ est commutative par hypothèse. Et chaque terme de cette somme appartient à I car I est un idéal et la puissance k est supérieure ou égale à n_1 ou la puissance $n_1 + n_2 - k$ est supérieure ou égale à n_2 .

D'autre part, pour tout $(i, a) \in \sqrt{I} \times A$, $i \times a \in \sqrt{I}$ car $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $i^n \in I$ et, parce que A est commutatif, $(i \times a)^n = i^n \times a^n \in I$ car $i^n \in I$ et I est un idéal.

Donc $\sqrt{I}$ est un idéal.

2. (a) Voir la preuve dans le cours.
 (b) Soit $i \in \sqrt{I}$. Il existe alors n tel que $i^n \in I$. Or $I \subset J$, d'où $i^n \in J$, d'où $i \in \sqrt{J}$. Donc $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$.
 (c) On utilise la question précédente pour prouver une inclusion : $I \cap J \subset I$, d'où $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I}$. De même, $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{J}$. Donc $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

Et pour l'autre inclusion : soit $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Il existe alors $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in I$ et $x^p \in J$. Par suite $x^{n+p} = x^n \times x^p \in I \cap J$ car $x^n \in I$ et I est un idéal. Et, de même, $x^{n+p} \in J$. D'où $x^{n+p} \in I \cap J$. Donc $x \in \sqrt{I \cap J}$.

Par double inclusion, $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

3. D'une part, $I \subset \sqrt{I}$ d'après la question 1. D'où $\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$ d'après la question 2b.

D'autre part, $\sqrt{\sqrt{I}} \subset \sqrt{I}$. En effet : soit $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$. Il existe alors n tel que $x^n \in \sqrt{I}$. Et il existe donc p tel que $(x^n)^p \in I$. D'où $x^{np} \in I$. D'où $x \in \sqrt{I}$. Donc $\sqrt{\sqrt{I}} \subset \sqrt{I}$.

Par double inclusion, $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Exercice 4. Soit n un entier naturel non nul.

1. Ecrire le cycle $(1, 2, 3, 4)$ comme la composée de transpositions de la forme $(1, i)$, où $i \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$. Votre solution est-elle unique?

- Soient x et y deux éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit la permutation $f = (1, x) \circ (1, y) \circ (1, x)$. Calculer $f(z)$ pour chaque $z \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- Montrer que toute permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est la composée de transpositions de la forme $(1, i)$, où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- $(1, 2, 3, 4) \xrightarrow{(1,2)} (2, 1, 3, 4) \xrightarrow{(1,3)} (2, 3, 1, 4) \xrightarrow{(1,4)} (2, 3, 4, 1)$

d'où le cycle $(1, 2, 3, 4)$ est égal à la composée $(1, 4) \circ (1, 3) \circ (1, 2)$.

Cette solution n'est pas unique car $(1, 2) \circ (1, 2) = \text{id}$, d'où une autre solution :

$$(1, 2) \circ (1, 2) \circ (1, 4) \circ (1, 3) \circ (1, 2).$$

- Si $z \notin \{1, x, y\}$, alors $f(z) = z$.

Si $x \neq 1$ et $y \neq 1$, alors $f(1) = 1$, $f(x) = y$ et $f(y) = x$, d'où $f = (x, y)$.

Si $x = 1$, alors $f = (1, y)$.

Si $y = 1$, alors $f = \text{id}$.

- Toute permutation est une composée de transpositions (x, y) . Or toute transposition (x, y) est, d'après la question précédente, une composée de transpositions de la forme $(1, i)$. Donc toute permutation est une composée de transpositions $(1, i)$.

Exercice 5. Soit $n \geq 2$ et le cycle $c = (1 \ 2 \ \dots \ n-1 \ n)$. Déterminer toutes les permutations σ de S_n telles que $\sigma \circ c = c \circ \sigma$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la permutation c^k est une solution de l'équation $\sigma \circ c = c \circ \sigma$. Réciproquement, montrons que toute solution σ est de la forme c^k .

Si σ est une solution de $\sigma \circ c = c \circ \sigma$, alors (par récurrence), $\sigma \circ c^i = c^i \circ \sigma$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Le cycle $c = (1 \ 2 \ \dots \ n-1 \ n)$ s'écrit aussi $(c^0(1) \ c^1(1) \ \dots \ c^{n-2}(1) \ c^{n-1}(1))$. D'où $\exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\sigma(1) = c^k(1)$. Par suite, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma(i) = \sigma \circ c^{i-1}(1) = c^{i-1} \circ \sigma(1) = c^{i-1} \circ c^k(1) = c^k \circ c^{i-1}(1) = c^k(i)$. Donc $\sigma = c^k$.

Exercice 6 (Résultant de deux polynômes). Soient deux polynômes $P = X^2 + aX + b$ et $Q = X^2 + cX + d$ de $\mathbb{C}_2[X]$ et le déterminant

$$\Delta(P, Q) = \begin{vmatrix} b & 0 & d & 0 \\ a & b & c & d \\ 1 & a & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

- Montrer que $\Delta(P, Q) = 0$ si, et seulement si, il existe deux polynômes $U \in \mathbb{C}_1[X]$ et $V \in \mathbb{C}_1[X]$ non tous nuls tels que $UP = VQ$.
- Montrer que P et Q ont au moins une racine commune si, et seulement si, $\Delta(P, Q) = 0$.

-

$$\Delta(P, Q) = \begin{vmatrix} b & 0 & d & 0 \\ a & b & c & d \\ 1 & a & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

est égal au déterminant, dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{C}_3[X]$, de la famille de vecteurs

$$(P, XP, Q, XQ), \quad \text{où} \quad P = X^2 + aX + b \text{ et } Q = X^2 + cX + d.$$

Il est nul ssi cette famille est liée, ssi il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0)$ tel que $\alpha P + \beta XP + \gamma Q + \delta XQ = 0$, ssi il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0)$ tel que $(\alpha + \beta X)P = (-\gamma - \delta X)Q$, ssi il existe deux polynômes $U \in \mathbb{C}_1[X]$ et $V \in \mathbb{C}_1[X]$ non tous nuls tels que $UP = VQ$.

- Il existe $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{C}^4$ tel que $P = (X - p_1)(X - p_2)$ et $Q = (X - q_1)(X - q_2)$.

Si P et Q ont une racine commune, alors (par exemple) $p_1 = q_1$, d'où $(X - q_2)P = (X - p_2)Q$.

Réciproquement : si $UP = VQ$, alors $(\alpha + \beta X)(X - p_1)(X - p_2) = (-\gamma - \delta X)(X - q_1)(X - q_2)$, d'où : $q_1 = p_1$ ou $q_1 = p_2$ ou $q_1 = -\frac{\alpha}{\beta}$ (et alors $q_2 = p_1$ ou $q_2 = p_2$). Dans les trois cas, P et Q ont au moins une racine commune.

Exercice 7. On note $\Gamma = \{0, 1\}$, $\Gamma[X]$ l'ensemble des polynômes dont les coefficients appartiennent à Γ et $\Gamma_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\Gamma[X]$ dont le degré est inférieur ou égal à n .

1. Quel est le cardinal de $\Gamma_n[X]$?
2. Montrer que, pour tout $P \in \Gamma_{2p}[X]$,

$$-2 \frac{4^p - 1}{3} \leq P(-2) \leq \frac{4^{p+1} - 1}{3}.$$

3. Soient $P, Q \in \Gamma[X]$ tels que $P(-2) = Q(-2)$. Montrer que $P = Q$.
4. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{Z}$, il existe $P \in \Gamma[X]$ tel que $N = P(-2)$.

1. Le cardinal de $\Gamma_n[X]$ vaut 2^{n+1} car construire un polynôme de $\Gamma[X]$, c'est choisir ses $n+1$ coefficients dans Γ .
2. Pour tout $P \in \Gamma_{2p}[X]$,

$$-2 \frac{4^p - 1}{3} = \sum_{k=0}^{p-1} (-2)^{2k+1} \leq P(-2) \leq \sum_{k=0}^p (-2)^{2k} = \frac{4^{p+1} - 1}{3}.$$

3. Soient $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$ deux polynômes différents appartenant à $\Gamma[X]$. On note n_0 le plus grand entier tel que le coefficient de degré n_0 de P n'est pas égal au coefficient de degré n_0 de Q . On a donc :

$$\begin{aligned} |P(-2) - Q(-2)| &= \left| \sum_{k=0}^{n_0} (a_k - b_k)(-2)^k \right| \\ &\geq |a_{n_0} - b_{n_0}| 2^{n_0} - \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k - b_k| 2^k \\ &\geq 2^{n_0} - \sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k \\ &= 2^{n_0} - (2^{n_0} - 1) = 1 \end{aligned}$$

Donc $P(-2)$ ne peut être égal à $Q(-2)$.

4. L'application

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_n[X] & \rightarrow & \left[\left[2 \frac{4^p - 1}{3}, \frac{4^{p+1} - 1}{3} \right] \right] \\ P & \mapsto & P(-2) \end{array}$$

est injective, d'après la question précédente. Or il y a $2 \frac{4^p - 1}{3} + \frac{4^{p+1} - 1}{3} + 1 = 2^{2p+1}$ éléments dans $\left[\left[2 \frac{4^p - 1}{3}, \frac{4^{p+1} - 1}{3} \right] \right]$ et il y a 2^{2p+1} polynômes dans $\Gamma_n[X]$. Cette application est donc aussi surjective. On en conclut que pour tout $N \in \mathbb{Z}$, en prenant p suffisamment grand, il existe un polynôme $P \in \Gamma_{2p}[X]$ tel que $P(-2) = N$.

Exercice 8 (Nombre de diviseurs d'un entier – oral X ENS PSI 2011).

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i|j$ et zéro sinon.

1. Montrer que $a_{i,1} + a_{i,2} + \dots + a_{i,n}$ est égal à la partie entière de $\frac{n}{i}$.
2. Soit s_n la somme des n^2 éléments de la matrice A_n . Déterminer un équivalent de s_n .
3. Soit d_n le nombre des diviseurs de n . Montrer que $d_1 + \dots + d_n \sim n \ln n$.

1. La somme $k = a_{i,1} + a_{i,2} + \dots + a_{i,n}$ est le nombre d'entiers $j \in [1, n]$ tels que $i|j$, c'est-à-dire le nombre de multiples de i compris dans $[1, n]$. On cherche donc l'entier k tel que $i, 2i, \dots, ki$ sont $\leq n$ et $n < (k+1)i$, ou encore $k \leq \frac{n}{i} < n+1$. Par définition de la partie entière, on obtient

$$a_{i,1} + a_{i,2} + \dots + a_{i,n} = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

2. On note H_n le n -ième nombre harmonique $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. En effectuant une somme par lignes, la première question montre que $s_n = \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$. Comme $x-1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $nH_n - n \leq s_n \leq nH_n$. Or $H_n \sim \ln n$ (il s'agit d'une comparaison série-intégrale appliquée à la fonction continue et décroissante $t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{t}$) et on en déduit que

$$s_n \sim n \ln n.$$

3. On peut aussi calculer s_n en effectuant une somme par colonnes. Tout d'abord, la définition des $a_{i,j}$ montre que $a_{1,j} + \dots + a_{n,j}$ est le nombre des diviseurs de j compris entre 1 et n , c'est-à-dire le nombre d_j des diviseurs de j (car $j \leq n$). Alors $s_n = \sum_{j=1}^n d_j$.

Le quotient $\frac{s_n}{n}$ est le nombre moyen de diviseurs d'un entier dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Le résultat démontré dit que ce nombre moyen est équivalent à $\ln(n)$.

Exercice 9. Montrer que, pour tout entier p premier supérieur ou égal à 5 :

$$24 \mid (p^2 - 1).$$

Soit un entier p premier supérieur ou égal à 5.

D'une part $p - 1$ et $p + 1$ sont des entiers pairs et l'un des deux est un multiple de 4. Par suite $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ est un multiple de 8.

D'autre part $p - 1$ ou $p + 1$ est un multiple de 3 car p ne l'est pas. Par suite $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ est un multiple de 3.

Or 3 et 8 sont premiers entre eux, donc $p^2 - 1$ est un multiple de $3 \times 8 = 24$.

Exercice 10. Soient (a, b) dans $\mathbb{Z}^2$ et n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer que :

1. $\text{pgcd}(a + b, a - b) \in \{1; 2\}$;
2. $\text{pgcd}(a^2 + b^2, a + b) \in \{1; 2\}$.

-
1. D'après le lemme de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ua + vb = 1$.

Soit d un diviseur commun à $a + b$ et $a - b$. Alors d divise $2a$ et $2b$. D'où d divise aussi $u2a + v2b = 2$.

Donc $\text{pgcd}(a + b, a - b) \in \{1; 2\}$.

REMARQUE — les 2 cas sont possibles car :

- si $(a, b) = (2, 3)$, alors $\text{pgcd}(5, -1) = 1$;
- si $(a, b) = (3, 5)$, alors $\text{pgcd}(8, -2) = 2$.

2. a^2 et b^2 sont aussi premiers entre eux, il existe donc $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ua^2 + vb^2 = 1$ d'après le lemme de Bézout.

Soit d un diviseur commun à $a^2 + b^2$ et $a + b$. Alors d divise $2a^2 = (a^2 + b^2) + (a + b)(a - b)$ et $2b^2 = (a^2 + b^2) - (a + b)(a - b)$. D'où d divise aussi $u2a^2 + v2b^2 = 2$.

Donc $\text{pgcd}(a^2 + b^2, a + b) \in \{1; 2\}$.

REMARQUE — les 2 cas sont possibles car :

- si $(a, b) = (2, 3)$, alors $\text{pgcd}(13, -1) = 1$;
- si $(a, b) = (3, 5)$, alors $\text{pgcd}(34, -2) = 2$.