

C O L L E N° 0 4

Algèbre linéaire

Exercice 1. Soient des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et $a \neq b$. On pose, pour tout réel x ,

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \cdots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \cdots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]}$$

1. Montrer que $\Delta_n : x \mapsto \Delta_n(x)$ est une fonction affine.
2. Calculer $\Delta_n(x)$ en fonction de x et en déduire $\Delta_n(0)$.

Exercice 2. 1. Montrer que la famille de polynômes

$$(X^2, (X+1)^2, (X+2)^2, (X+3)^2)$$

est liée.

2. Soit a, b, c, d quatre nombres complexes. Montrer que le déterminant suivant est nul :

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. Soit un polynôme $A(X) \in E$ tel que le réel $a = \int_0^1 A(t) dt$ est non nul. Déterminer le noyau et un polynôme annulateur de l'endomorphisme

$$u : E \rightarrow E, P(X) \mapsto A(X) \int_0^1 P(t) dt - P(X) \int_0^1 A(t) dt.$$

Cet endomorphisme est-il surjectif ?

Exercice 4. Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et $f : E \rightarrow E$ l'application qui transforme chaque suite réelle $u = (u_n)$ en la suite réelle $v = (v_n)$ définie par

$$v_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ?
3. Pour quelles valeurs du réel λ existe-t-il une suite u non nulle telle que $f(u) = \lambda u$?