D.S. N° 2 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient un problème en 5 parties.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, H le sous-espace vectoriel des polynômes P tels que $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0$ et C le sous-espace vectoriel des polynômes constants.

2 **1.** Montrer que H et C sont supplémentaires dans E. $\exists$ 1 ! 1

8

PARTIE I. L'ENDOMORPHISME Δ

Soit Δ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall P \in E,\ \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

Ker(Δ) $\subset$ C 2

C $\subset$ Ker(Δ) 1

3 **2.** Déterminer le noyau de Δ.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n et Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur E_n.

$\underbrace{E_n \text{ stable par } \Delta \ 1 \text{ car } 1}$ 0,5 0,5

3 **3.** Justifier que Δ_n est bien défini puis déterminer le rang et l'image de Δ_n.

2 **4.** Montrer que l'endomorphisme Δ est surjectif.

Partie II. Les polynômes de Bernoulli

Cette partie utilise la partie I.

5. Prouver qu'il existe une unique suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels telle que $B_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta(B_n) = nX^{n-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_n(x)\,dx = 0.$$

6. Calculer le polynôme B_1 et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le degré du polynôme B_n et le coefficient dominant de B_n.

7. Prouver que :

$$\forall n \geq 2, B_n(0) = B_n(1).$$

On considère la famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{B'_{n+1}}{n+1}.$$

8. Expliciter C_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\Delta(C_n)$.

9. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = nB_{n-1}.$$

10. Soient p et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)}{p+1}.$$

11. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

12. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X).$$

13. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = B_{2k+1}(1) = 0.$$

14. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = 2^{n-1}\left[B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right].$$

6 Partie III. La dérivation des polynômes

Dans cette partie, seule la dernière question utilise la partie II.

2 **15.** Soient P un polynôme de E et Q le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^x P(t)\,dt + \int_0^1 (t-1)P(t)\,dt.$$

Montrer que le polynôme Q appartient à H. (On pourra noter R le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = \int_0^x P(t)\,dt$.)

Soit f l'application linéaire de H vers E qui, à tout polynôme P de H, associe le polynôme P', dérivée de P.

1 **16.** Montrer que f est injective.

2 **17.** Montrer que f est surjective.

1 **18.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $f^{-1}(X^k)$ et $f^{-1}(B_k)$.

0,5 0,5

5 Partie IV. Calcul approché d'une intégrale

Cette partie utilise la partie II.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et f désigne une fonction de classe C^{2n} sur $[0,1]$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note :

$$R_k = \frac{1}{(2k)!}\int_0^1 f^{(2k)}(x)B_{2k}(x)\,dx.$$

1 **19.** Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. En effectuant deux intégrations par parties, montrer que :

$$R_k = \frac{1}{(2k+1)!}[f^{(2k)}(x)B_{2k+1}(x)]_0^1 - \frac{1}{(2k+2)!}[f^{(2k+1)}(x)B_{2k+2}(x)]_0^1 + R_{k+1}.$$

4 **20.** En déduire la formule d'Euler-Maclaurin :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)\right) + R_n.$$

14

Partie V. Polynômes stabilisant $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$

Cette partie utilise la partie I.

On note le polynôme $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme

$$H_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

3 **21.** Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, écrire le polynôme

$$P_n = 1 - X + \frac{X(X-1)}{2} - \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k H_k$$

sous la forme d'un produit de n facteurs du premier degré. (On pourra conjecturer la formule et la prouver par récurrence.)

On dit qu'un polynôme P de E stabilise $\mathbb{Z}$ si : $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$.

3 **22.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme H_n stabilise $\mathbb{Z}$.

1 **23.** Calculer $\Delta(H_0)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(H_n)$ en fonction de H_{n-1}.

2 **24.** Montrer que la famille 0,5 $(H_0, \cdots, H_n)$ est une base du sous-espace vectoriel E_n. Écrire la matrice de 0,5 l'endomorphisme Δ_n dans cette base. En déduire que Δ_n est 0,5 nilpotent. Quel est son indice 0,5 de nilpotence ?

2,5 **25.** Soit $P \in E_n$ stabilisant $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que :

$$P = c_0 H_0 + \cdots + c_n H_n.$$

0,5 **26.** En déduire tous les polynômes de E stabilisant $\mathbb{Z}$.

On dit qu'un polynôme P stabilise $\mathbb{Q}$ si : $\forall x \in \mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}$.

2 **27.** Déterminer tous les polynômes de E qui stabilisent $\mathbb{Q}$.

Les polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ stabilisent $\mathbb{Q}$ 0,5
Réciproquement : ... 1,5