Corrigé du D.S. n° 2 de mathématiques

L'énoncé a été tiré des textes de concours suivants :

Centrale Supélec Math 2 MP-MPI 2024

Centrale Supélec Math 1 TSI 2014

CCINP Math 2 L2 2003.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, H le sous-espace vectoriel des polynômes P tels que $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0$ et C le sous-espace vectoriel des polynômes constants.

1. Montrons que $H \cap C = \{0\}$. Si $P \in H \cap C$, alors il existe un réel c tel que $P = c$ et

$$0 = \int_0^1 P(t)dt = c.$$

D'où le polynôme P est nul. Donc la somme $H + C$ est directe.

Montrons que $H + C = E$. Soit $P \in E$. Le polynôme $P - \int_0^1 P(t)dt$ appartient à H. Et (télescope) $P = P - \int_0^1 P(t)dt + \int_0^1 P(t)dt$. D'où P appartient à $H + C$. Donc $\boxed{H \oplus C = E.}$

Partie I. L'endomorphisme Δ

Soit Δ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall P \in E,\ \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

2. Soit $P(X) \in \mathrm{Ker}(\Delta)$: alors $P(X) - P(X-1)$ est le polynôme nul, d'où $P(k) = P(0)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, d'où $P(k) - P(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, d'où le polynôme $P(X) - P(0)$ a une infinité de racines, d'où $P(X) - P(0)$ est le polynôme nul, donc $P(X)$ est constant.

Réciproquement : si $P(X)$ est constant, alors $P(X) \in \mathrm{Ker}(\Delta)$.

Donc $\boxed{\text{le noyau de } \Delta \text{ est l'ensemble } C \text{ des polynômes constants.}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n et Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur E_n.

3. Soit $P \in E_n$. Les polynômes $P(X+1)$ et $P(X)$ ont le même terme dominant, d'où $\deg \Delta(P) \leq n-1$, donc $\Delta(P) \in E_{n-1}$ et *a fortiori* $\Delta(P) \in E_n$.

$\boxed{\text{Le sous-espace vectoriel } E_n \text{ est stable par l'endomorphisme } \Delta, \text{ donc l'endomorphisme } \Delta_n \text{ est bien défini.}}$

D'après la question 2, le noyau de Δ_n est le sous-espace vectoriel $C = \text{Vect}(1)$, qui est de dimension 1.

Or $\dim E_n = n+1$. Le théorème du rang donne alors : $\boxed{\text{rg}(\Delta_n) = n.}$

On a prouvé que $\text{Im}(\Delta_n) \subset E_{n-1}$ et $\dim \text{Im}(\Delta_n) = n$, donc $\boxed{\text{Im}(\Delta_n) = E_{n-1}.}$

4. Soit $Q \in E$ un polynôme. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $Q \in E_{n-1}$. De $\text{Im}(\Delta_n) = E_{n-1}$, on déduit alors qu'il existe un polynôme $P \in E$ tel que $\Delta_n(P) = Q$. D'où $\Delta(P) = Q$. Donc $\boxed{\text{l'endomorphisme } \Delta \text{ est surjectif.}}$

Partie II. Les polynômes de Bernoulli

5. Par construction, le polynôme B_0 existe et est unique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De la surjectivité de Δ, on tire l'existence d'un polynôme $P \in E$ tel que $\Delta(P) = nX^{n-1}$. De la question 1, on tire l'existence de $(P_0, c) \in H \times C$ tel que $P = P_0 + c$. Or $\Delta(P) = \Delta(P_0)$ d'une part et $P_0 \in H$ d'autre part. D'où l'existence d'un polynôme P_0 tel que $\Delta(P_0) = nX^{n-1}$ et $\int_0^1 P_0(x)\, dx = 0$.

C'est le seul polynôme qui convient car : d'une part $\Delta(P_0) = \Delta(P_1) \implies P_1 - P_0 \in \text{Ker}(\Delta) \implies P_1 - P_0 \in C$ d'après la question 2. D'autre part $P_1 - P_0 \in H$. D'où $P_1 - P_0 \in H \cap C$ qui est réduit au vecteur nul d'après la question 1. D'où $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de } B_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

6. $P(X+1) = aX + a + b$ si on pose $P(X) = aX + b$. D'où $\Delta(P) = a$. L'équation $\Delta(P) = 1$ est équivalente à $a = 1$. Et l'équation $\int_0^1 P(x)\, dx = 0$ est équivalente à $b = -\frac{1}{2}$. Donc $\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}}$.

Soit $n \geq 1$. Le polynôme B_n n'est pas nul, notons donc p son degré. Le polynôme s'écrit alors $B_n(X) = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots$ et, par suite, $B_n(X+1) = a_p X^p + (pa_p + a_{p-1})X^{p-1} + \cdots$. D'où $\Delta(B_n) = pa_p X^{p-1} + \cdots$. Or $\Delta(B_n) = nX^{n-1}$. Donc $p = n$ et $a_p = 1$.

$\boxed{\text{Pour chaque } n \in \mathbb{N}^*, \text{ le degré de } B_n \text{ est } n \text{ et le coefficient du terme dominant est 1.}}$

7. Pour tout $n \geq 2$, $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$. En évaluant en 0, on obtient $B_n(1) - B_n(0) = 0$. D'où

$\boxed{\forall n \geq 2, B_n(0) = B_n(1).}$

On considère la famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{B'_{n+1}}{n+1}.$$

8. $C_0 = B'_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(C_n) = \frac{1}{n+1}[B'_{n+1}(X+1) - B'_{n+1}(X)] = \frac{1}{n+1}[B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X)]'$. Comme $B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = (n+1)X^n$, on obtient $\frac{1}{n+1}[(n+1)X^n]'$. Donc $\boxed{\Delta(C_n) = nX^{n-1}.}$

9. On constate que $C_0 = B_0 = 1$ et $\Delta(C_n) = \Delta(B_n) = nX^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est l'unique suite vérifiant ces égalités, donc $C_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $\frac{B'_{n+1}}{n+1} = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\boxed{B'_n = nB_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

10. Soient p et n dans $\mathbb{N}^*$. D'après la question 5,

$$\sum_{k=0}^{n} k^p = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)}{p+1} = \frac{B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)}{p+1}$$

en télescopant.

11. On commence par calculer les polynômes B_2 et B_3 en appliquant la relation de récurrence de la question 9 au polynôme $B_1 = X - \frac{1}{2}$ calculé à la question 6 :

$B'_2 = 2B_1 = 2X - 1$, d'où $\exists c \in \mathbb{R},\ B_2 = X^2 - X + c$. De la condition $\int_0^1 B(x)\,dx = 0$, on tire que $c = \frac{1}{6}$.

Donc $\boxed{B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6} \text{ et } B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X}$ en procédant de même à partir de B_2.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{B_2(n+1) - B_2(0)}{2} = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Et, de même :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{B_3(n+1) - B_3(0)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

après calcul.

12. On note $D_n = (-1)^n B_n(1-X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $D_0 = B_0(1-X) = 1$. Et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(D_n) = (-1)^n[B_n(1-(X+1)) - B_n(1-X)] = nX^{n-1}$. La suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les mêmes relations que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc, par unicité : $\boxed{B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $B_{2k+1}(0) = (-1)^{2k+1}B_{2k+1}(1) = -B_{2k+1}(1)$. De plus, $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1)$ d'après la question 7. Donc $\boxed{B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.}$

En évaluant le résultat de la question précédente en $\frac{1}{2}$, on obtient $B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = (-1)^{2k+1}B_{2k+1}(1-\frac{1}{2}) = -B_{2k+1}(\frac{1}{2})$. Ceci implique $2B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = 0$, d'où $\boxed{B_{2k+1}(\tfrac{1}{2}) = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.}$

14. On note $E_n = 2^{n-1}[B_n(\frac{X}{2}) + B_n(\frac{X+1}{2})]$. Alors $E_0 = \frac{1}{2}[B_0(\frac{X}{2}) + B_0(\frac{X+1}{2})] = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(E_n) = 2^{n-1}[(B_n(\frac{X+1}{2}) + B_n(\frac{X+2}{2})) - (B_n(\frac{X}{2}) + B_n(\frac{X+1}{2}))]$. D'où $\Delta(E_n) = 2^{n-1}[B_n(\frac{X}{2}+1) - B_n(\frac{X}{2})]$. Ce qui est égal à $2^{n-1}n(\frac{X}{2})^{n-1} = nX^{n-1}$.

La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie ainsi la relation vérifiée uniquement par la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui permet de conclure : $\boxed{B_n(X) = 2^{n-1}[B_n(\frac{X}{2}) + B_n(\frac{X+1}{2})] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Partie III. La dérivation des polynômes

15. Le polynôme R est la primitive de P qui s'annule en 0. D'où, après une intégration par parties : $\int_0^1 (t-1)P(t)\,dt = [(t-1)R(t)]_0^1 - \int_0^1 R(t)\,dt = 0 - \int_0^1 R(t)\,dt$. D'où $Q(x) = R(x) - \int_0^1 R(t)\,dt$.

Donc $\boxed{Q \in H.}$

Soit f l'application linéaire de H vers E qui, à tout polynôme P de H, associe le polynôme P', dérivée de P.

16. Si $P \in \operatorname{Ker} f$, alors $P' = 0$. D'où le polynôme P est constant, c'est-à-dire appartient à C. Or P appartient à H (qui est l'ensemble de départ de f). D'où $P = 0$ car $P \in H \cap C$ qui est réduit au nul d'après la question 1. Donc $\boxed{\text{l'application } f \text{ est injective.}}$

17. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Le polynôme Q défini dans la question 15 appartient à H et de plus $f(Q) = Q' = P$.

Donc $\boxed{f \text{ est une application surjective.}}$

18. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après les deux questions précédentes l'unique polynôme Q tel que $f(Q) = X^k$ est le polynôme Q tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Q(x) = \int_0^x t^k dt + \int_0^1 (t-1)t^k dt$. Donc

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_0^x t^k dt + \int_0^1 (t-1)t^k dt \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f^{-1}(X^k) = \dfrac{X^{k+1}}{k+1} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}.}$

Trouver $f^{-1}(B_k)$, c'est chercher l'unique polynôme P de H tel que $f(P) = B_k$, c'est-à-dire tel que $P' = B_k$. D'après la question 9, c'est le polynôme $\frac{B_{k+1}}{k+1}$. Donc $\boxed{f^{-1}(B_k) = \frac{B_{k+1}}{k+1}.}$

Partie IV. Calcul approché d'une intégrale

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et f désigne une fonction de classe C^{2n} sur $[0,1]$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note :

$$R_k = \frac{1}{(2k)!}\int_0^1 f^{(2k)}(x)B_{2k}(x)\,dx.$$

19. De la question 9, on tire que :

$$B_{2k} = \frac{B'_{2k+1}}{2k+1} = \frac{B''_{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)}.$$

Et, en intégrant :

$$R_k = \frac{1}{(2k)!}\int_0^1 f^{(2k)}(x)\frac{B''_{2k+2}(x)}{(2k+1)(2k+2)}dx = \frac{1}{(2k+2)!}\int_0^1 f^{(2k)}(x)B''_{2k+2}(x)dx.$$

De plus, les fonctions $f^{(2k)}$ et B'_{2k+2} sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc, en intégrant par parties (on dérive $f^{(2k)}$ et on intègre B''_{2k+2}) :

$$\begin{aligned} R_k = &\frac{1}{(2k+2)!}[f^{(2k)}(x)B'_{2k+2}(x)]_0^1 \\ &- \frac{1}{(2k+2)!}\int_0^1 f^{(2k+1)}(x)B'_{2k+2}(x)dx \end{aligned}$$

et donc, à l'aide d'une seconde intégration par parties, $f^{(2k+1)}$ et B_{2k+2} étant de classe C^1 sur $[0,1]$ et comme $B'_{2k+2} = (2k+2)B_{2k+1}$:

$$\boxed{R_k = \tfrac{1}{(2k+1)!}[f^{(2k)}(x)B_{2k+1}(x)]_0^1 - \tfrac{1}{(2k+2)!}[f^{(2k+1)}(x)B_{2k+2}(x)]_0^1 + R_{k+1}.}$$

20. Comme $B_1(0) = -\frac{1}{2}$ et $B_1(1) = \frac{1}{2}$ et comme $B_2(0) = B_2(1)$:

$$R_0 - R_1 = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \frac{B_2(0)}{2!}[f'(0) - f'(1)]$$

et, comme $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) = 0$ si $k \geq 1$:

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad R_k - R_{k+1} = \frac{B_{2k+2}(0)}{(2k+2)!}[f^{(2k+1)}(0) - f^{(2k+1)}(1)]$$

donc, en sommant toutes ces égalités :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(R_k - R_{k+1}) = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_{2k+2}(0)}{(2k+2)!}[f^{(2k+1)}(0) - f^{(2k+1)}(1)]$$

Les termes de la première somme se télescopent et, en effectuant un changement d'indice dans la dernière somme :

$$R_0 - R_n = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)].$$

Finalement, comme $R_0 = \int_0^1 f(x)dx$:

$$\boxed{\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)] + R_n.}$$

Partie V. Polynômes stabilisant $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$

On note le polynôme $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme

$$H_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

21. Nous allons montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des racines de P_n est $\{1, \dots, n\}$:

Initialisation : $P_1 = 1 - X$. Donc l'ensemble des racines de P_1 est bien $\{1\}$.

Hérédité : Supposons que l'ensemble des racines de P_{n-1} est $\{1, \dots, n-1\}$. L'ensemble des racines de $P_n = P_{n-1} + (-1)^n H_n$ contient alors $\{1, \dots, n-1\}$. Il reste à montrer que n est aussi une racine.

$$\begin{aligned} P_n(n) &= 1 - n + \tfrac{n(n-1)}{2} + \dots + (-1)^n \tfrac{n(n-1)\dots(1)}{n!} \\ &= 1 - \tbinom{n}{1} + \tbinom{n}{2} + \dots + (-1)^n \tbinom{n}{n} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} (-1)^k \\ &= (1-1)^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des racines de P_n contient $\{1, \dots, n\}$. Or ce polynôme est de degré n. Donc il a au plus n racines. Donc $\{1, \dots, n\}$ est exactement l'ensemble des racines de P_n

Donc $P_n = \lambda_n \Pi_{k=1}^{n} (X-k)$ et le coefficient dominant est $\frac{(-1)^n}{n!} = \lambda_n$. Donc

$$\boxed{P_n = \tfrac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} (X-k) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{X}{k}\right).}$$

On dit qu'un polynôme P de E stabilise $\mathbb{Z}$ si : $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$.

22. Soit $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors $H_j(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}$ est un entier relatif car :

- si $k \geqslant j$, on obtient $\binom{k}{k-j}$, qui est bien entier ;
- si $k < 0$, alors $H_j(k) = (-1)^j H_j(j-k-1)$, et on est ramené au cas précédent ;
- si $0 \leqslant k < j$, alors zéro figure parmi les facteurs du numérateur, donc $H_j(k) = 0$.

23. $\boxed{\Delta(H_0) = 0 \text{ et } \Delta(H_n) = H_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$ car

$$\begin{aligned} H_n(X+1) - H_n(X) &= \frac{(X+1)X\cdots(X+1-n+1)}{n!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} \\ &= \frac{X(X-1)\cdots(X-n+2)}{n!} [(X+1) - (X-n+1)] \\ &= \frac{X(X-1)\cdots(X-(n-1)+1)}{n!} \cdot n. \end{aligned}$$

24. La famille de polynômes $(H_0, \cdots, H_n)$ est échelonnée en degrés, c'est donc une famille libre de $n+1$ vecteurs de E_n, or $\dim E_n = n+1$, c'est donc une base du sous-espace vectoriel E_n. Dans cette base, la matrice de Δ_n est

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,n+1}(\mathbb{R}).$$

d'après la question précédente.

De $M_n^{n+1} = 0$ et $M_n^n \neq 0$, on tire que $\boxed{\text{l'endomorphisme } \Delta_n \text{ est nilpotent d'indice } n+1.}$

25. On démontre la propriété par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors $P = c_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ stabilise $\mathbb{Z}$ implique $c_0 \in \mathbb{Z}$.

On suppose la propriété établie pour $n-1$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ stabilisant $\mathbb{Z}$. Alors $\Delta(P)$ aussi, et comme $\Delta(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\Delta(P) = \sum_{j=1}^n c_j H_{j-1}$.

Comme $\sum_{j=1}^n c_j H_j$ est l'un des antécédents de $\sum_{j=1}^n c_j H_{j-1}$ par Δ, et comme le noyau de Δ est $\mathbb{R}_0[X]$, on peut affirmer qu'il existe une constante *réelle* c_0 telle que $P = \sum_{j=1}^n c_j H_j + c_0$.

Enfin, comme $P(0) = c_0$ et P stabilise $\mathbb{Z}$, on peut dire que $c_0 \in \mathbb{Z}$.

26. Pour tout polynôme $P \in E$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in E_n$. Des questions 22 et 25, on déduit que : un polynôme $P \in E$ stabilise $\mathbb{Z}$ si, et seulement si, c'est une combinaison linéaire à coefficients entiers, d'un nombre fini de polynômes de la suite $(H_n)_{n \in N}$.

On dit qu'un polynôme P stabilise $\mathbb{Q}$ si : $\forall x \in \mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}$.

27. $\boxed{\text{Ce sont les polynômes de } \mathbb{Q}[X] \text{, c'est-à-dire à coefficients rationnels.}}$ D'une part, ces polynômes conviennent. D'autre part, on montre par récurrence sur le degré qu'il n'y en a pas d'autres :

Si P est une constante réelle a_0, comme $P(Q) = \{a_0\}$, la condition $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ implique effectivement que a_0 soit rationnel. Supposons la propriété vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Soit $P = a_n X^n + Q$, avec $a_n \neq 0$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Alors $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ vérifie aussi $[\Delta(P)](\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Or $\Delta(P) = n a_n X^{n-1} + \cdots$ est de degré $n-1$. L'hypothèse de récurrence assure que $\Delta(P)$ est à coefficients rationnels, et en particulier que $n a_n \in \mathbb{Q}$, donc que $a_n \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, l'hypothèse $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ se traduit par $Q(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, et l'hypothèse de récurrence assure que Q est à coefficients rationnels. Finalement $P \in \mathbb{Q}[X]$.