

CORRIGÉ DU T.D. N° 4

Réduction

9 octobre 2025

Exercice 1. Soient a et b deux réels. Diagonaliser, si possible, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R}).$$

(On essaiera de deviner des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A .)

Les vecteurs colonnes $\varepsilon_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$, $\varepsilon_2 = (1 \ -1 \ -1 \ 1)^T$, $\varepsilon_3 = (1 \ 0 \ 0 \ -1)^T$ et $\varepsilon_4 = (0 \ 1 \ -1 \ 0)^T$ sont des vecteurs propres de la matrice A , associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 = (a+b)^2$, $\lambda_2 = (a-b)^2$, $\lambda_3 = a^2 - b^2$ et $\lambda_4 = a^2 - b^2$. Ils forment une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ car ils sont au nombre de 4 et ils sont libres :

$$\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3 + \alpha_4 \varepsilon_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \implies \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

La matrice A est donc diagonalisable car la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est inversible et la matrice } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & & & \\ & (a-b)^2 & & \\ & & a^2 - b^2 & \\ & & & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \text{ est diagonale.}$$

Exercice 2 (AB & BA).

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Calculer les deux produits matriciels par blocs

$$\begin{pmatrix} xI_n - BA & B \\ 0 & xI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xI_n & B \\ 0 & xI_n - AB \end{pmatrix}.$$

En déduire que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique et donc le même spectre.

2. Supposons que A est inversible et que AB est diagonalisable. Montrer que BA est diagonalisable.

1. Soit $x \in \mathbb{K}$. Les deux produits matriciels par blocs

$$\begin{pmatrix} xI_n - BA & B \\ 0 & xI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xI_n & B \\ xA & xI_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xI_n & B \\ 0 & xI_n - AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xI_n & B \\ xA & xI_n \end{pmatrix}$$

sont égaux, d'où leurs déterminants aussi. Or on peut calculer ces déterminants par blocs car ils sont triangulaires par blocs :

$$\det(xI_n - BA) \cdot \det(xI_n) \times \det(I_n) \cdot \det(I_n) = \det(I_n) \cdot \det(I_n) \times \det(xI_n) \cdot \det(xI_n - AB).$$

Or $\det(xI_n) = x^n$. D'où $x^n \cdot (\chi_{AB}(x) - \chi_{BA}(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- PREMIÈRE MÉTHODE : D'où $\chi_{AB}(x) - \chi_{BA}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. D'où le polynôme $\chi_{AB} - \chi_{BA}$ est nul car il a une infinité de racines (à savoir tous les réels non nuls). D'où $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

- SECONDE MÉTHODE : D'où le polynôme $X^n \cdot (\chi_{AB} - \chi_{BA})$ est nul car il a une infinité de racines (à savoir tous les réels). D'où $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Donc les polynômes caractéristiques de AB et de BA sont égaux. Les valeurs propres étant les racines du polynôme caractéristique, les spectres de AB et de BA sont aussi égaux.

2. La matrice AB est diagonalisable, il existe donc une matrice inversible P telle que $P^{-1}ABP = D$. D'où $B = A^{-1}PDP^{-1}$, donc $BA = A^{-1}PDP^{-1}A = (A^{-1}P)D(A^{-1}P)^{-1}$ est semblable à D . Donc BA est aussi diagonalisable.

Exercice 3 ($u \circ v$ & $v \circ u$). Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel.

1. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que : si $\lambda \neq 0$, alors λ est aussi une valeur propre de $v \circ u$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que la propriété de la première question reste valable pour $\lambda = 0$.
3. Soit, pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$u(P) = P' \quad \text{et} \quad v(P) = \int_0^X P(t) dt$$

Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$. Conclure.

1. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$: il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que $u(v(x)) = \lambda x$. D'où $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$. Or $v(x) \neq 0$ car $u(v(x)) \neq 0$. Donc λ est une valeur propre de $v \circ u$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Si 0 est une valeur propre de $u \circ v$, alors $\det(u \circ v) = 0$. Or $\det(u \circ v) = \det(v \circ u)$. D'où $\det(v \circ u) = 0$. Donc 0 est une valeur propre de $v \circ u$.
3. Pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $u \circ v(P) = P$ et $v \circ u(P) = P - P(0)$. D'où $\text{Ker}(u \circ v) = \{0\}$ et $\text{Ker}(v \circ u) = \mathbb{R}_0[X]$. D'où 0 est une valeur propre de $v \circ u$ mais pas de $u \circ v$. Donc la propriété de la question précédente n'est pas toujours vraie en dimension infinie.

Exercice 4 (Banque PT 2007, épreuve A). Soient n un entier naturel et f l'endomorphisme qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, associe le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$f(P) = (X^2 - 1) \cdot P'' + X \cdot P'.$$

1. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f .
2. L'endomorphisme φ_n induit par f sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est-il diagonalisable ?
3. Déterminer le noyau $\text{Ker}(\varphi_n)$ de l'endomorphisme φ_n . Et le noyau $\text{Ker}(f)$ de l'endomorphisme f .
4. Montrer que, pour chaque entier naturel k , il existe un unique polynôme unitaire T_k de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$(X^2 - 1) \cdot T_k'' + X \cdot T_k' - k^2 \cdot T_k = 0.$$

Quel est le degré de ce polynôme T_k ? Déterminer les polynômes T_0 , T_1 et T_2 .

1. $f(X^0) = 0$, $f(X^1) = X$ et $f(X^k) = (X^2 - 1) \cdot k(k-1)X^{k-2} + X \cdot kX^{k-1} = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}$ pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Il en résulte que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc, par linéarité de f , l'image de tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. La matrice A_n de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est, d'après les calculs de la question précédente,

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \times 1 & & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & n^2 \end{pmatrix}.$$

3. Le polynôme caractéristique de la matrice A_n est $\det(\lambda I_{n+1} - A_n) = (\lambda - 0) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2^2) \cdots (\lambda - n^2)$ (c'est un déterminant triangulaire, donc égal au produit des éléments diagonaux).

Donc $\text{Sp}(\varphi_n) = \{0, 1, 2^2, \dots, n^2\}$.

4. L'endomorphisme φ_n possède $n+1$ valeurs propres distinctes deux à deux, or $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, donc φ_n est diagonalisable.
 5. Du polynôme caractéristique, on déduit que, pour chaque valeur propre λ , $1 \leq \dim \text{Ker}(\lambda \text{id} - \varphi_n) \leq 1$.

Le noyau $\text{Ker}(\varphi_n)$ est aussi le sous-espace propre $\text{Ker}(0 \text{id} - \varphi_n)$ associé à la valeur propre 0. Or ce sous-espace propre est de dimension 1 et contient le polynôme 1 (car $f(X^0) = 0$), donc $\text{Ker}(\varphi_n) = \text{Vect}(1)$ est l'ensemble des polynômes constants.

6. Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit P_k un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre k^2 . La famille (X^0, P_1, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car φ_n est diagonalisable. D'où

$$\text{Im}(\varphi_n) = \text{Vect}(f(X^0), f(P_1), \dots, f(P_n)) = \text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$$

car $f(X^0) = 0$ et $f(P_k) = k^2 P_k$ pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

En outre, la famille (P_1, \dots, P_n) est libre car les sous-espaces propres sont en somme directe. C'est donc une base de $\text{Im}(\varphi_n)$. Et on sait déjà que (X^0) est une base de $\text{Ker}(\varphi_n)$. Or la concaténation de ces deux bases est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car les sous-espaces propres sont en somme directe.

Donc les noyau et image de φ_n sont supplémentaires : $\text{Ker}(\varphi_n) \oplus \text{Im}(\varphi_n) = \mathbb{R}_n[X]$.

AUTRE MÉTHODE : D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(\varphi_n) + \dim \text{Im}(\varphi_n) = \dim \mathbb{R}_n[X]$.

Il reste à montrer que $\text{Ker}(\varphi_n) \cap \text{Im}(\varphi_n) = \{0\}$, où 0 est le polynôme nul. Si un polynôme P appartient à cette intersection, alors :

- il appartient au noyau, d'où P est constant ;
 - il appartient à l'image, or l'image $P = f(Q)$ d'un polynôme Q de degré $k \geq 1$ est un polynôme de même degré k , d'où $k < 1$, par suite Q est constant, d'où P est l'image d'un polynôme constant, donc P est le polynôme nul.
7. Soit $k \in \mathbb{N} : (X^2 - 1) \cdot T_k'' + X \cdot T_k' - k^2 \cdot T_k = 0 \iff f(T_k) = k^2 T_k \iff T_k \in E_{k^2}(f)$.

ANALYSE : Si $T_k = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ est un polynôme unitaire de degré n , alors le coefficient dominant du polynôme $f(T_k)$ est n^2 d'après la question 1. Par suite, si $f(T_k) = k^2 T_k$, alors $n = k$, donc $\deg T_k = k$. D'où $f(T_k) = \varphi_k(T_k) = k^2 T_k$. D'où T_k est un polynôme non nul du sous-espace propre $E_{k^2}(\varphi_k)$. Or ce sous-espace propre est de dimension 1, donc T_k est l'unique polynôme unitaire de ce sous-espace propre. SYNTHÈSE : ce polynôme est bien une solution.

8. La matrice de φ_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$f(X_0) = \varphi_2(X^0) = 0 = 0X^0$, $f(X) = \varphi_2(X) = X = 1X$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où $f(2X^2 - 1) = \varphi_2(2X^2 - 1) = 4(2X^2 - 1)$.

Donc $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_2 = X^2 - \frac{1}{2}$.

Exercice 5 (La matrice compagnon).

Soient \mathbb{K} égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} , p scalaires a_0, a_1, \dots, a_{p-1} dans \mathbb{K} et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{p-3} & -a_{p-2} & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pp}(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que λ est une valeur propre de la matrice M si, et seulement si,

$$\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

de deux manières :

- en calculant le polynôme caractéristique de M ;
 - en recherchant les vecteurs propres associés au scalaire λ .
2. Quelle est la dimension du sous-espace propre associé à chaque valeur propre λ ? Montrer que la matrice M est diagonalisable si, et seulement si, elle possède p valeurs propres distinctes deux à deux.

1. *Première méthode* : Le polynôme caractéristique de la matrice M , défini par $\chi_M(x) = \det(xI_p - M)$ pour tout $x \in \mathbb{K}$, est un déterminant $p \times p$, qui, après l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + xC_2 + x^2C_3 + \dots + x^{p-1}C_p$ sur les colonnes, s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ P(x) & \cdots & \cdots & a_{p-3} & a_{p-2} & a_{p-1} \end{vmatrix}$$

et se développe en suivant la première colonne :

$$\chi_M(x) = (-1)^{p-1} \cdot P(x) \cdot (-1)^{p-1} = P(x), \text{ avec } P(x) = x^n + a_{p-1}x^{p-1} + \dots - a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Et λ est une valeur propre de la matrice M si, et seulement si, $\chi_M(\lambda) = 0$.

Seconde méthode : Soient un scalaire λ et un vecteur colonne $X = (x_1, \dots, x_p)^T$:

$$\begin{aligned} MX = \lambda X &\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1, & x_3 = \lambda x_2, \dots, x_p = \lambda x_{p-1} \\ -a_0x_1 - a_2x_1 - \dots - a_{p-1}x^p = \lambda x_p \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X = x_1 \cdot (1, \lambda, \dots, \lambda^{p-1})^T \quad (*) \\ P(\lambda) = 0 \quad (**) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc λ est une valeur propre si, et seulement si, (**). Et les vecteurs propres sont les vecteurs non nuls donnés par (*).

2. On reprend la seconde méthode de la question précédente. Pour chaque valeur propre λ , les vecteurs du sous-espace propre $\text{Ker}(\lambda I_p - M)$ sont donnés par (*). D'où $\text{Ker}(\lambda I_p - M) = \text{Vect}(e_\lambda)$, où e_λ est le vecteur colonne $(1, \lambda, \dots, \lambda^{p-1})^T$.

La matrice M est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des *sep* est égale à p . Or chaque sous-espace propre est ici de dimension 1. Donc elle est diagonalisable si, et seulement si, elle possède p valeurs propres distinctes deux à deux.

Exercice 6 (Discuter suivant les valeurs des paramètres).

Soient a, b et c trois réels. Soient, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs des réels a, b et c ces matrices sont-elles diagonalisables ?

RÉDAC : Ne pas confondre paramètres (a, b, c) et inconnues (x, y, z). Dans les systèmes d'équations à suivre, on cherche les solutions (x, y, z) en disjoignant les cas suivant les valeurs des paramètres a, b ou c .

1. • Si $a = 1$, alors $P_A(X) = (X - 1)^3$, d'où $\text{Sp}(A) = \{1\}$. La matrice A n'est pas diagonalisable car $A \neq I_3$.

• Si $a \neq 1$, alors $P_A(X) = (X - 1)^2(X - a)$, d'où $\text{Sp}(A) = \{1; a\}$ et $\begin{cases} 1 \leq \dim \text{SEP}(1) \leq 2 \\ 1 \leq \dim \text{SEP}(a) \leq 1 \end{cases}$.

La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $\dim \text{SEP}(1) = 2$. Soit $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : AX = 1X \iff \begin{cases} ay = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

— Si $a = 0$, alors soit $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : AX = 1X \iff z = 0$, d'où $\dim \text{SEP}(1) = 2$.

— Si $a \neq 0$, alors soit $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : AX = 1X \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, d'où $\dim \text{SEP}(1) = 1$.

D'où la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $a = 0$.

- Donc A est diagonalisable si, et seulement si, $a = 0$.

- Si $c = 2$, alors $P_B(x) = (x - 2)^3$, d'où $\text{Sp}(B) = \{2\}$.
 - Si $b = 0$, alors la matrice $B = 2I_3$ est diagonale, donc diagonalisable.
 - Si $b \neq 0$, alors la matrice B n'est pas diagonalisable car $B \neq 2I_3$.
- Si $c \neq 2$, alors $P_B(x) = (x - 2)^2(x - c)$, d'où $\text{Sp}(B) = \{2; c\}$ et $\begin{cases} 1 \leq \dim \text{SEP}(2) \leq 2 \\ 1 \leq \dim \text{SEP}(c) \leq 1 \end{cases}$. La matrice B est diagonalisable si, et seulement si, $\dim \text{SEP}(2) = 2$. Soit $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : BX = 2X \iff y = 0$. D'où la matrice B est diagonalisable.

- Donc B est diagonalisable si, et seulement si, $c \neq 2$ ou $b = 0$.

Exercice 7 (Une matrice de rang 1 est diagonalisable ssi sa trace n'est pas nulle).

▷ **TD n°2 exo 4 : matrices de rang 1 et base adaptée**

On considère une matrice M de taille $n \times n$ et de rang 1.

1. On suppose que $\text{tr}(M) = 0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable et préciser le spectre de M .
2. Réciproquement, on suppose que $\text{tr}(M) \neq 0$. Montrer que M est diagonalisable et préciser son spectre.

On se place dans une base adaptée (RÉDAC : construire explicitement cette base ▷ **TD n°2 exo 4**) : la matrice M étant de rang 1,

elle est semblable à une matrice $M' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où les $*$ sont des réels et λ aussi est un réel, égal à $\text{tr}(M')$. En outre,

$\text{tr}(M') = \text{tr}(M)$, $\text{Sp}(M') = \text{Sp}(M)$ et la matrice M' est diagonalisable si, et seulement si, la matrice M l'est.

1. Le réel λ est nul et le polynôme caractéristique de M' est donc $\chi_{M'}(X) = (X - 0)^n$. D'où $\text{Sp}(M') = \{0\}$. Par l'absurde : si M' est diagonalisable, alors M' est semblable à la matrice nulle, d'où M' est la matrice nulle. C'est absurde car le rang de M' vaut 1.
2. Le polynôme caractéristique de M' est $\chi_{M'}(X) = (X - 0)^{n-1} \cdot (X - \lambda)$ et λ n'est pas nul. La matrice M' a donc deux valeurs propres distinctes : 0 et $\lambda = \text{tr}(M)$.

D'une part, $\text{SEP}(0) = \text{Ker}(0I_n - M') = \text{Ker}(M')$ a pour dimension $n - 1$ d'après le théorème du rang. Il existe donc une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ de $\text{SEP}(0)$.

D'autre part, il existe au moins un vecteur propre ε_n associé à la valeur propre λ .

Enfin la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ est libre car les *sep* sont en somme directe. Or elle contient n vecteurs. C'est donc une base formée de vecteurs propres de M' , qui est par suite diagonalisable.

Exercice 8 (Matrices stochastiques). On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1. Soit $U = (1 \ 1 \ \cdots \ 1)^T \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Montrer que A est stochastique si, et seulement si, tous ses éléments de matrice sont positifs et $AU = U$. En déduire que 1 est une valeur propre de toute matrice stochastique et que le produit de deux matrices stochastiques est encore stochastique.
2. Montrer que le spectre (réel) d'une matrice stochastique est inclus dans $[-1, +1]$.
3. On suppose que tous les éléments $a_{i,j}$ d'une matrice A stochastique sont strictement positifs. Montrer que le sous-espace propre $\text{Ker}(I_n - A)$ est égal à $\text{Vect}(U)$.

1. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ si, et seulement si, $AU = U$ car $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soient A et B deux matrices stochastiques :

- le réel 1 est une valeur propre de la matrice A car le vecteur colonne U n'est pas nul et $AU = 1U$;
- d'une part, les éléments de matrice $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ du produit $C = AB$ sont positifs car tous les a_{ik} et b_{kj} le sont et, d'autre part $(AB)U = A(BU) = AU = U$.

2. Si un réel λ est une valeur propre de la matrice stochastique A , alors il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ non nul tel que

$AX = \lambda X$. D'où, pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = \lambda x_i$.

Notons $m = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. Il existe un indice i tel que $|x_i| = m$ et, pour cet indice i : $|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j| = |\lambda| \cdot m$.

D'après l'inégalité triangulaire, $|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot m$ car chaque coefficient $a_{i,j}$ est positif par hypothèse.

D'où $|\lambda| \cdot m \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot m$. Or le réel m est strictement positif car le vecteur colonne X n'est pas nul. D'où $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}$. Donc $|\lambda| \leq 1$.

3. De la première question, on déduit que $AU = U$, d'où $U \in \text{Ker}(I_n - A)$ qui est un *sev*, donc $\text{Vect}(U) \subset \text{Ker}(I_n - A)$. Réciproquement, en supposant de plus que tous les a_{ij} sont strictement positifs : si X est un vecteur de $\text{Ker}(I_n - A)$, alors $AX = X$. D'où, pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = x_i$. En particulier, soit i un indice tel que x_i est maximal : $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = x_i$. Or $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_i \leq x_i$ et il y a égalité si, et seulement si, tous les x_j sont égaux car tous les $a_{i,j}$ sont strictement positifs. Donc $X \in \text{Vect}(U)$.

Exercice 9 (Trigonalisation & équations différentielles).

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable. Est-elle trigonalisable ?
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et les déterminer.
3. En déduire toutes les solutions, sur \mathbb{R} , du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) \end{cases} .$$

1. Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A = (X - 1)^2$. D'où :
 - le spectre de A est $\{1\}$ et A n'est pas diagonalisable (car, par l'absurde, si A est diagonalisable, alors A est semblable à I_2 , d'où $A = I_2$);
 - mais A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ car χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
2. ANALYSE — Si A est semblable à $T = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, alors $(X - 1)^2 = \chi_A = \chi_T = (X - a)(X - b)$, donc $a = b = 1$.

SYNTHÈSE — Soient $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et P la matrice dont la première colonne est V_1 et la seconde colonne V_2 :

$$P^{-1}AP = T \iff AV_1 = 1V_1 \text{ et } AV_2 = 1V_1 + 1V_2.$$

D'une part, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut donc choisir $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'autre part, en notant $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$AV_2 = 1V_1 + 1V_2 \iff \begin{cases} y = 1 + x \\ -x + 2y = 1 + y \end{cases} \iff y = 1 + x.$$

Choisissons $x = 0$, c'est-à-dire $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

CONCLUSION — La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (car $\det P = 1 \neq 0$) et $P^{-1}AP = T$.

3.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) \end{cases} &\iff X'(t) = A \cdot X(t) \quad \text{en notant } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ &\iff U'(t) = T \cdot U(t) \quad \text{en notant } U(t) = P^{-1}X(t) \\ &\iff \begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = v(t) \end{cases} \quad \text{en notant } U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'une part, $v'(t) = v(t) \iff v(t) = Ke^t$. D'autre part :

$$\begin{aligned} u'(t) = u(t) + Ke^t &\iff \ell'(t)e^t + \ell(t)e^t = \ell(t)e^t + Ke^t \quad \text{en faisant varier la constante, c'est-à-dire en posant } u(t) = \ell(t)e^t \\ &\iff \ell'(t) = K \\ &\iff \ell(t) = Kt + L \\ &\iff u(t) = (Kt + L)e^t. \end{aligned}$$

$$\text{Or } U(t) = \begin{pmatrix} (Kt + L)e^t \\ Ke^t \end{pmatrix} \iff X(t) = P \cdot U(t) = \begin{pmatrix} (Kt + L)e^t \\ (Kt + K + L)e^t \end{pmatrix}.$$

Donc $\Sigma \iff \exists(K, L) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = (Kt + L)e^t \\ y(t) = (Kt + K + L)e^t \end{cases}$

Exercice 10 (Commutation et stabilité ▷ [proposition IV.35](#)). Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le spectre de la matrice A et trouver une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
- Soit B une matrice de taille 3×3 qui commute avec A ($AB = BA$). Montrer que B est diagonalisable.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \in \text{Sp}(A) \iff \det(\lambda I_3 - A) = 0$. On calcule le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda - 3 & 4 \\ -4 & -1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} &= (\lambda - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} \quad (C_1 + C_2 + C_3 \rightarrow C_1) \\ &= (\lambda - 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda + 4 \end{vmatrix} \quad (C_2 + C_1 \rightarrow C_2) \\ &= (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 3) \end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{1; 2; -3\}$ et la matrice A est diagonalisable car elle est de taille 3 et possède 3 valeurs propres distinctes deux à deux. Soit $V \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$:

$$AV = 1V \iff \begin{cases} x + y - z = 1x \\ 2x + 3y - 4 = 1y \\ 4x + y - 4z = 1z \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \iff V = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$AV = 2V \iff \begin{cases} x + y - z = 2x \\ 2x + 3y - 4 = 2y \\ 4x + y - 4z = 2z \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} \iff V = z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$AV = -3V \iff \begin{cases} x + y - z = -3x \\ 2x + 3y - 4 = -3y \\ 4x + y - 4z = -3z \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} y = 7x \\ z = 11x \end{cases} \iff V = x \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs-colonnes $V_1 = (1 \ 1 \ 1)^T$, $V_2 = (1 \ 2 \ 1)^T$ et $V_3 = (1 \ 7 \ 11)^T$ sont libres car leurs valeurs propres sont distinctes deux à

deux, donc la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$ est inversible et la matrice $D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonale.

2. Les matrices A et B commutent, d'où : les *sep* de A sont stables par B . Par conséquent :
- d'après la question ??, le vecteur-colonne $V_1 = (1 \ 1 \ 1)^T$ appartient au sous-espace propre $\text{Ker}(1I_3 - A)$, d'où son image BV_1 aussi. Or $\text{Ker}(1I_3 - A) = \text{Vect}(V_1)$, d'où $BV_1 \in \text{Vect}(V_1)$, d'où $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}$, $BV_1 = \lambda_1 V_1$, donc V_1 est un vecteur propre de B .
 - de même, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de B .
- Or, d'après la question ??, (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$, donc B est diagonalisable.

Exercice 11. Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que $M^5 = M^2$. En déduire une relation d'inclusion entre les deux ensembles $\text{Sp}(M)$ et $\{0, 1, j, j^2\}$, où $j = e^{i2\pi/3}$.
2. On suppose de plus que $\text{tr}(M) = n$. Montrer que 1 est l'unique valeur propre de la matrice M . Cette matrice est-elle inversible ?
3. Déterminer toutes les matrices M telles que $M^5 = M^2$ et $\text{tr}(M) = n$.

1. Le polynôme $P(X) = X^5 - X^2$ est un polynôme annulateur de la matrice M , d'où : si λ est une valeur propre de M , alors λ est une racine de P . Or les racines de $P(X) = X^2(X^3 - 1)$ sont 0 et les racines cubiques de l'unité : $1, j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\text{Sp}(M) \subset \{0, 1, j, j^2\}$.

2. Soit m_λ la multiplicité de chaque racine λ du polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique de M est scindé dans \mathbb{C} , d'où (\triangleright Proposition IV.10) $\text{tr}(M) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} m_\lambda \cdot \lambda = m_0 \times 0 + m_1 \times 1 + m_j \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + m_{j^2} \times \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Cette trace vaut n par hypothèse, donc 1 est l'unique valeur propre. Par suite, 0 n'est pas une valeur propre de M , donc la matrice M est inversible.

3. *Analyse* : on a vu que M est inversible. En multipliant $M^5 = M^2$ par M^{-2} , on obtient donc $M^3 = I_n$. Le polynôme $Q(X) = X^3 - 1$ est donc un polynôme annulateur de M . Or ce polynôme $Q(X) = (X - 1) \cdot (X - j) \cdot (X - j^2)$ est scindé à racines simples, d'où la matrice M est diagonalisable. Mais on a aussi vu que 1 est l'unique valeur propre de M . La matrice M , une fois diagonalisée, devient donc l'identité I_n : M est semblable à I_n , on en déduit que $M = I_n$.

Synthèse : la matrice I_n est bien une solution de l'équation $M^5 = M^2$ et sa trace est bien égale à n .

Conclusion : l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\text{tr}(M) = n$ est donc $\{I_n\}$.

AUTRE MÉTHODE : le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M est $(X - 1)^n$ car le spectre de M est $\{1\}$. Le polynôme minimal μ_M de la matrice M divise les deux polynômes $\chi_M = (X - 1)^n$ et $P = X^5 - X^2 = X^2(X - 1)(X - j)(X - j^2)$ car ils sont tous deux annulateurs de la matrice M . D'où $\mu_M = X - 1$, donc $0 = \mu(M) = M - I_n$, donc $M = I_n$. LA synthèse est identique à celle de première méthode.

Exercice 12 (Polynômes annulateurs).

1. \triangleright TD n° 2 exo 14 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Phi: M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\text{tr } M)I_n + M$. Déterminer les éléments propres (*id est* les valeurs propres et les sous-espaces propres) de Φ . L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
2. \triangleright TD n° 2 exo 14 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\Phi(M) = PM + MP$. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
3. \triangleright Colle n° 4 exo 3 — On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. Soit un polynôme $A(X) \in E$ tel que le réel $a = \int_0^1 A(t) dt$ est non nul. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme

$$u : E \rightarrow E, P(X) \mapsto A(X) \int_0^1 P(t) dt - P(X) \int_0^1 A(t) dt.$$

1. On calcule $\Phi^2(M) = \text{tr}(\Phi(M))I_n + \Phi(M) = (n \text{tr } M + \text{tr } M)I_n + (\text{tr } M)I_n + M = (n+2)(\text{tr } M)I_n + M$, et on constate que $\Phi^2(M) - (n+2)\Phi(M) + (n+1)M = 0$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, le polynôme

$$P = X^2 - (n+2)X + n+1 = (X-1)(X-(n+1))$$

est annulateur de Φ . Ce polynôme annulateur est scindé à racines simples (car $n \in \mathbb{N}^*$), donc l'endomorphisme Φ est diagonalisable.

De plus, le spectre de Φ est inclus dans l'ensemble des racines de P , d'où $\text{Sp}(\Phi) \subset \{1, n+1\}$. Le réel 1 est-il une valeur propre ? L'équation $\Phi(M) = M$ étant équivalente à $\text{tr}(M) = 0$, le sous-espace propre $E_1(\Phi)$ est l'hyperplan des matrices de trace nulle. D'où 1 est une valeur propre et la dimension de $E_1(\Phi)$ vaut $n^2 - 1$. Le réel $n+1$ est-il une valeur propre ?

– *Première méthode* : la somme des dimensions des *sep* est égale à n^2 car Φ est diagonalisable. On sait alors que $\dim E_{n+1}(\Phi) = 1$, et il suffit de constater que $\Phi(I_n) = (n+1)I_n$ pour obtenir le second sous-espace propre $E_{n+1}(\Phi) = \text{Vect}(I_n)$.

– *Seconde méthode* : $M \in E_{n+1}(\Phi) \implies \Phi(M) = (n+1)M \implies (\text{tr } M)I_n = nI_n \implies M = \frac{\text{tr } M}{n}I_n \implies M \in \text{Vect}(I_n)$. Réciproquement, $M \in \text{Vect}(I_n) \implies \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha I_n \implies \Phi(M) = n\alpha I_n + \alpha I_n \implies \Phi(M) = (n+1)M \implies M \in E_{n+1}(\Phi)$. Donc $E_{n+1}(\Phi) = \text{Vect}(I_n)$. Cette seconde méthode permet aussi de conclure d'une autre manière que Φ est diagonalisable car la somme des dimensions des *sep* de Φ est égale à la dimension de l'ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En résumé, puisque l'énoncé réclame les éléments propres (= les valeurs propres et les sous-espaces propres) :

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\Phi) &= \{1, n+1\} \\ E_1(\Phi) &= \text{Ker}(\text{tr}) \\ E_{n+1}(\Phi) &= \text{Vect}(I_n). \end{aligned}$$

2. La matrice P est celle d'un projecteur, d'où $P^2 = P$. On cherche un polynôme annulateur de Φ :

$$\Phi^2(M) = P(PM + MP) + (PM + MP)P = \Phi(M) + 2PMP, \quad \text{d'où } 2PMP = \Phi^2(M) - \Phi(M)$$

$$\text{donc } \Phi^3(M) = \Phi^2(M) + 4PMP = 3\Phi^2(M) - 2\Phi(M) \text{ pour toute matrice } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit que le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est annulateur de l'endomorphisme Φ . Il est de plus scindé à racines simples, donc l'endomorphisme Φ est diagonalisable.

Exercice 13. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Montrer que $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^2)$.
- On suppose que A^2 est diagonalisable.
Montrer que : A est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^2)$.
- Donner un exemple de matrice A telle que A^2 soit diagonalisable mais pas A .

Notons E l'ev $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$.

- Soit $X \in E$: si $AX = 0$, alors $A^2X = A \cdot (AX) = A \cdot 0 = 0$. Donc $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^2)$.
- La matrice A^2 est diagonalisable, d'où ses sous-espaces propres sont supplémentaires :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \text{Ker}(\lambda I_n - A^2) \quad (*).$$

Pour chaque valeur propre complexe λ non nulle, le polynôme $(X^2 - \lambda)$ se factorise en $(X - \sqrt{\lambda})(X + \sqrt{\lambda})$, en notant $\sqrt{\lambda}$ une des deux racines complexes de λ . D'où $\text{Ker}(\lambda I_n - A^2) = \text{Ker}(\sqrt{\lambda}I_n - A) \oplus \text{Ker}(-\sqrt{\lambda}I_n - A)$ d'après le LEMME DES NOYAUX.

• Premier cas : 0 n'est pas une valeur propre de A — D'une part, $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2 = \{0_E\}$ car la matrice A est inversible et, donc, la matrice A^2 aussi. D'autre part,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A^2)} \left[\text{Ker}(\sqrt{\lambda}I_n - A) \oplus \text{Ker}(-\sqrt{\lambda}I_n - A) \right].$$

d'après (*). D'où l'ev E est une somme de sous-espaces propres de la matrice A . Donc cette matrice A est diagonalisable.

• Deuxième cas : 0 est une valeur propre de A — D'après (*),

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A^2) \setminus \{0\}} \left[\text{Ker}(\sqrt{\lambda}I_n - A) \oplus \text{Ker}(-\sqrt{\lambda}I_n - A) \right] \oplus \text{Ker}(A^2).$$

Si $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^2)$, E est une somme de sous-espaces propres de la matrice A . Donc cette matrice A est diagonalisable.

Réciproquement :

— (Première méthode) si $\text{Ker}(A) \neq \text{Ker}(A^2)$, alors la somme directe

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A^2) \setminus \{0\}} \left[\text{Ker}(\sqrt{\lambda}I_n - A) \oplus \text{Ker}(-\sqrt{\lambda}I_n - A) \right] \oplus \text{Ker}(A)$$

n'est pas égale à E car $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^2)$ d'après la première question mais $\text{Ker}(A) \neq \text{Ker}(A^2)$. Or il n'y a pas d'autres sous-espaces propres de A car il n'y a pas d'autre valeur propre de A (en effet : $\forall \mu \in \mathbb{C}, \mu \in \text{Sp}(A) \implies \mu^2 \in \text{Sp}(A^2)$). D'où les *sep* de A ne sont pas supplémentaires, donc A n'est pas diagonalisable.

— (Deuxième méthode) si A est diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale. Et, par suite, $D^2 = P^{-1}A^2P$. Les matrices diagonales D^2 et D ont le même nombre de zéros sur la diagonale. Or ces nombres de zéros sont $\dim \text{Ker}(A)$ et $\dim \text{Ker}(A^2)$. Les *sev* $\text{Ker}(A)$ et $\text{Ker}(A^2)$ ont donc la même dimension. D'après la première question, il sont donc égaux.

Dans les deux cas : A est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^2)$.

3. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors A^2 est la matrice nulle et $\text{Ker}(A^2) = E \neq \text{Ker}(A)$.

Exercice 14. Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit l'endomorphisme

$$f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto [(aX + b)P]'$$

- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
- Pour quelle(s) valeur(s) de (a, b) l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit l'endomorphisme

$$f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto [(aX + b)P]'$$

1. Si $a = 0$:

- si $b = 0$, alors $f(P) = 0$, d'où $\text{Sp}(f) = \{0\}$ et $SEP(0) = \mathbb{R}_n[X]$;
- si $b \neq 0$, alors $f(P) = bP'$, d'où $f(P) = \lambda P \iff P' = \frac{\lambda}{b}P \iff P(x) = K \cdot e^{\lambda x/b}$. Et P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si, $\lambda = 0$. D'où $\text{Sp}(f) = \{0\}$ et $SEP(0) = \mathbb{R}_0[X]$.

Si $a \neq 0$, alors $f(P) = \lambda P \iff (ax + b)P'(x) = (\lambda - a)P(x) \iff \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = K \cdot (ax + b)^{(\lambda - a)/a}$. Et P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si, $\frac{\lambda}{a} - 1 \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'où $\text{Sp}(f) = \{(k+1)a, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et $SEP((k+1)a) = \text{Vect}((ax + b)^k)$.

2. Si $a \neq 0$, alors f possède $n + 1$ valeurs propres distinctes deux à deux, d'où f est diagonalisable.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors 0 est l'unique valeur propre et $\dim SEP(0) = 1 < n + 1$, d'où f n'est pas diagonalisable.

Si $(a, b) = (0, 0)$, alors $f = 0$, d'où f est diagonalisable.

Exercice 15 (Hyperplans & transposée).

1. Soient un entier $n \geq 2$, une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et un vecteur colonne non nul $V = (v_1 \cdots v_n)^T$. Montrer que l'hyperplan H d'équation

$$v_1x_1 + \cdots + v_nx_n = 0$$

est stable par A si, et seulement si, V est un vecteur propre de A^T .

2. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 stables par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Supposons que V est un vecteur propre de $A^T : \exists \lambda \in \mathbb{R}, A^T \cdot V = \lambda V$ (*). Montrons que l'hyperplan H est stable par A .

Soit $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : X \in H \implies V^T \cdot X = 0 \implies \lambda \cdot (V^T \cdot X) = 0 \implies (\lambda V)^T \cdot X = 0 \stackrel{(*)}{\implies} (A^T \cdot V)^T \cdot X = 0 \implies (V^T \cdot A)^T \cdot X = 0 \implies V^T \cdot (A \cdot X) = 0 \implies A \cdot X \in H$. Donc l'hyperplan H est stable par A .

Réciproquement, supposons que l'hyperplan H est stable par A .

Alors, pour chaque $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$, $[V^T \cdot X = 0 \implies V^T \cdot (AX) = 0]$ (**). Or $V^T \cdot A = (A^T \cdot V)^T$.

Ou bien le vecteur colonne $A^T \cdot V$ est nul : V est alors un vecteur propre de A^T , associé à la valeur propre 0.

Ou bien le vecteur colonne $A^T \cdot V$ n'est pas nul : alors l'hyperplan d'équation $V^T \cdot X = 0$ est inclus, d'après (**), dans l'hyperplan d'équation $(A^T \cdot V)^T \cdot X = 0$. Donc ces deux hyperplans sont égaux car ils ont la même dimension, à savoir $n-1$ (c'est un théorème du cours). Or (c'est aussi un théorème du cours) deux équations d'un même hyperplan sont proportionnelles, d'où : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $A^T \cdot V = \lambda V$. Donc V est à nouveau un vecteur propre de A^T .

2. Les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 stables par A sont :

- (i) le singleton $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (certainement) ;
- (ii) des droites vectorielles incluses dans \mathbb{R}^3 (peut-être) ;
- (iii) des plans vectoriels inclus dans \mathbb{R}^3 (peut-être) ;
- (iv) tout l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 (certainement).

Précisons (ii) : une droite vectorielle $\text{Vect}(V)$ est stable par A si, et seulement si, V est un vecteur propre de A (c'est un théorème du cours). Cherchons donc les valeurs et vecteurs propres de A .

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 & 4 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \iff \dots \iff (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0.$$

D'où $\text{Sp}(A) = \{-1; 1; 2\}$. De plus :

$$AV = -1V \iff \dots \iff V \in \text{Vect}(V_1), \text{ où } V_1 = (1 \ 0 \ 1)^T$$

$$AV = 1V \iff \dots \iff V \in \text{Vect}(V_2), \text{ où } V_2 = (1 \ -1 \ 1)^T$$

$$AV = 2V \iff \dots \iff V \in \text{Vect}(V_3), \text{ où } V_3 = (2 \ -1 \ 1)^T$$

Il y a donc exactement 3 droites vectorielles stables par A : $\text{Vect}(V_1)$, $\text{Vect}(V_2)$ et $\text{Vect}(V_3)$.

Précisons (iii) : un plan vectoriel inclus dans \mathbb{R}^3 est un hyperplan, d'équation $V^T \cdot X = 0$. D'après la question précédente, il est stable par A si, et seulement si, V est stable par A^T . Cherchons donc les valeurs et vecteurs propres de A^T . Le spectre de A est égal à celui de A^T . De plus :

$$A^T \cdot V = -1V \iff \dots \iff V \in \text{Vect}(W_1), \text{ où } W_1 = (0 \ 1 \ 1)^T$$

$$A^T \cdot V = 1V \iff \dots \iff V \in \text{Vect}(W_2), \text{ où } W_2 = (1 \ 1 \ -1)^T$$

$$A^T \cdot V = 2V \iff \dots \iff V \in \text{Vect}(W_3), \text{ où } W_3 = (1 \ 0 \ -1)^T$$

Il y a donc exactement 3 hyperplans stables par A : ils ont pour équations respectives $y + z = 0$, $x + y - z = 0$ et $x - z = 0$.