

Matrices

1 Calcul matriciel élémentaire

Exercice 1. ♡* Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Vérifier que le produit $A^T A$ existe et que $\ker A^T A = \ker A$.

Exercice 2. ** Soit $n \in \mathbb{N}$ et H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit.

1. Rappeler la valeur du produit $E_{i,j}E_{k,l}$ où $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. On suppose que H ne contient pas l'identité. Démontrer que : $M^2 \in H \Rightarrow M \in H$, et en déduire une contradiction.
3. Pour les 5/2 : On suppose $n = 2$. Montrer que H est isomorphe en tant qu'algèbre à $T_2(\mathbb{C})$, l'algèbre des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 3. ♡♡ **

1. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Même question avec celles qui commutent avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.
3. Même question avec celles qui commutent avec toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Même question avec celles qui commutent avec toutes les matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4. * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = MA$. Calculer la trace de φ en fonction de celle de A .

Exercice 5. ** Soient n et p deux entiers, avec $1 \leq p \leq n$. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de matrices de rang p .

2 Calcul de l'inverse d'une matrice

Exercice 6. ♡

1. Soit $n \geq 2$. Soit $K_n = J_n - I_n$ où J_n est la matrice composée uniquement de 1. Montrer que $K_n^2 = (n-2)K_n + (n-1)I_n$; en déduire que K_n est inversible, et déterminer son inverse.
2. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $A = aJ_n + bI_n$. Dans le cas où A est inversible, calculer son inverse.

Exercice 7. Soit $M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer l'endomorphisme u de $\mathbb{K}[X]$ ayant M pour matrice.
2. En déduire l'inverse de M (méthode à retenir).

Exercice 8. ♡ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que A puisse se mettre sous la forme $A = I_n - N$ avec N matrice nilpotente d'indice de nilpotence p , c'est-à-dire $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$.

1. Calculer $A \left(\sum_{k=0}^{p-1} N^k \right)$.

2. Application : inverser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices suivantes

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. ♡♡ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de rang 1.

1. Montrer qu'il existe des matrices colonnes $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = XY^T$.
2. En déduire que $A^2 = \text{tr}(A)A$.
3. Quand une matrice de rang 1 est un projecteur ?
4. On suppose $\text{tr} A \neq -1$. Montrer que $I_n + A$ est inversible et que

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - \frac{1}{1 + \text{tr} A} A.$$

3 Changements de bases - Matrices semblables

Exercice 10. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 11. ♡♡* Montrer que si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^3 = -A$.

Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. * Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} telle que la matrice de f dans la base \mathcal{B} soit $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. ♡** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}$ qui n'a que des 0 sur la diagonale.

4 Autres

Exercice 15. ***

1. Montrer que $\ker \text{Tr} = \text{Vect}\{AB - BA, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$, où Tr est la forme linéaire trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que si Ψ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \Psi(AB) = \Psi(BA),$$

alors $\Psi = \lambda \text{Tr}$.

3. On veut montrer qu'en fait $\ker \text{Tr} = \{AB - BA, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$: c'est-à-dire si $M \in \ker(\text{tr})$, alors il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$. Pour cela :
 - (a) Montrer que l'on peut supposer M de diagonale nulle (on pourra utiliser l'exercice précédent).

- (b) Soit $\Delta = \text{Diag}(1, \dots, n)$. Déterminer le noyau puis l'image de l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), X \mapsto \Delta X - X \Delta$.
- (c) Conclure.

Exercice 16. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 17. * Soit $M \in M_{p,q}(\mathbb{R})$.
Montrer que : $\text{rg}(M) = \min\{k \in \mathbb{N}, M = AB \text{ avec } A \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{R})\}$.

Exercice 18. * Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps \mathbb{K} . Soit G un groupe pour la composition inclus dans $\mathcal{L}(E)$ avec $G \neq \{0\}$.

1. Soit j l'élément neutre de G . Que peut-on dire de j en tant qu'endomorphisme de E ?
2. Montrer que tous les éléments de G ont le même rang. On note r ce rang. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de tout élément u de G est de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $M \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$.

Exercice 19. ♡ ** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est idempotente si $A^2 = A$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ idempotente. Montrer que $\text{tr}(A) = \text{rg}(A)$.
2. Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ de cardinal p . Soit $A = \sum_{M \in G} M$.
 - i) Vérifier que A/p est idempotente.
 - ii) On suppose que $\text{tr}(A) = 0$. Montrer que $A = 0$.
 - iii) Montrer que $\text{tr}(A)$ est un entier divisible par p .
3. Soit $F = \{x \in \mathbb{R}^n; \forall M \in G, Mx = x\}$.
 - i) Montrer que F est un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension égale à $\text{tr}(A)/p$.
 - ii) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, expliciter un sous-groupe G de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ de cardinal p .

5 Déterminants

Exercice 20. * Soient A et B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) = \det(B) = \det(A - B) = \det(A + B) = 0$.
Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \det(xA + yB) = 0$.

Exercice 21. Soit a_1, \dots, a_n des complexes deux à deux distincts. Montre que la famille

$$((z - a_0)^n, \dots, (z - a_n)^n)$$

est forme une base de $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 22. ♡ * On pose pour $n \geq 2$

$$P_n(X) = X^n - X + 1.$$

1. Montrer que P_n admet n racines distinctes z_1, \dots, z_n dans \mathbb{C} .
2. Calculer le déterminant de

$$\begin{vmatrix} 1 + z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 + z_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 23. ** (Matrices tridiagonales) La matrice tridiagonale $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de type (a, b) est

$$\text{la matrice telle que } a_{i,j} = \begin{cases} b & \text{si } i = j + 1 \\ c & \text{si } i = j - 1 \\ a & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} : A = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

1. On note $T_n(a, b, c)$ le déterminant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $T_n(a, b, c)$ vérifie une relation d'é récurrence double.
2. Si $a = 2 \cos \theta$ et $b = c = 1$, calculer $\det A$.

Exercice 24. ** (Déterminant de Cauchy) Pour $(i, j) \in [1, n]^2$, on considère $a_i a_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$.

Calculer le déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Si $a_i = i - 1$ et $b_i = i$ pour tout i on appelle le déterminant de la matrice le déterminant de Hilbert.

Exercice 25. \heartsuit ** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit d_n la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments non nuls sont inversibles.

1. Montrer que $d_n \leq n$.
2. Déterminer d_2 .
3. Si n est impair, montrer que $d_n = 1$.

4. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$ privé de la matrice nulle est inclus dans $GL_4(\mathbb{R})$. En déduire d_4 .

Exercice 26. $\heartsuit\heartsuit$ **

1. Donner le rang de $Com(A)$ en fonction de celui de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Résoudre $A = Com(A)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 27. * Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$ telle que pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\det(A + X) = \det X$, montrer que $\det A = 0$ puis $A = 0$.

En déduire que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\det(A + X) = \det(B + X)$, alors $A = B$.

Exercice 28. ** Montrer que si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\forall i, j \in [1, n]^2, a_{i,j} \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq 1,$$

alors $|\det A| \leq 1$.

Exercice 29. $\heartsuit\heartsuit$ ** Soit A et B, C et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B) \det(A - B)$.
2. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$.
3. Montrer que si $AB = BA$, alors $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
4. Trouver un contre-exemple au point précédent si A et B ne commutent pas.
5. On suppose que $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

Matrices

(Solutions)

Solution 1. Soit $X \in \ker A$, alors $A^T A X = A^T 0 = 0$, donc $X \in \ker A^T A$.

Soit $X \in \ker A^T A$. Par définition, $A^T A X = 0$. En multipliant par X^T , on obtient

$$0 = X^T A^T A X = (A X)^T (A X) = \|A X\|^2.$$

On en déduit $Ax = 0$ et donc $X \in \ker A$.

Par double inclusion, on a montré l'égalité demandée.

Solution 2.

1. Comme $I_n \notin H$ et H hyperplan, toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit $M = M_H + \lambda_H I_n$ où $M_H \in H$ et $\lambda_H \in \mathbb{C}$ sont uniquement déterminés. Ainsi $M^2 = M_H^2 + 2\lambda_H M_H + \lambda_H^2 I_n$ appartient à H ssi $\lambda_H^2 = 0$, puisque par hypothèse $M_H^2 + 2\lambda_H M_H \in H$.
2. Si $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0 \in H$, donc $E_{i,j} \in H$ et $E_{i,j} E_{j,i} = E_{i,i}$ donc $E_{i,i} \in H$ pour tout i . Mais la somme des $E_{i,i}$ vaut I_n , ce qui contredit l'hypothèse $I_n \notin H$.
3. Si $n = 2$ et H une algèbre de dimension 3 qui contient I_n . S'il existe $M \neq \lambda I_n$ diagonalisable alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1} A P = D$ est diagonale. Or $N \in H \rightarrow P^{-1} N P$ est un isomorphisme d'algèbre.

Étudions $H' = P^{-1} H P$: par hypothèse, D n'est pas une homothétie, donc $E_{1,1}, E_{2,2} \in H'$. Comme

H' est de dimension 3, il existe une matrice de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. Or $N E_{1,1} = \beta E_{1,2}$ et $E_{1,1} N = \alpha E_{2,2}$. On en déduit que H' contient soit les matrices triangulaires supérieures, soit les matrices triangulaires inférieures. Quitte à prendre la transposée, on a le résultat.

Si les seules matrices diagonalisables sont les homothéties, alors par changement de base, on se ramène à $T = \alpha I_n + \beta E_{2,1}$ et donc $E_{2,1} \in H'$. Donc il existe $N \in H$ de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ et $E_{2,1} \in H'$. Or $E_{2,1} E_{1,2} = E_{2,2}$ et $E_{1,2} E_{2,1} = E_{1,1}$ et H' est l'espace des matrices carrées tout entier, c'est absurde.

Solution 3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et Δ une matrice diagonale $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les λ_i deux à deux distincts. On calcule

$$A\Delta - \Delta A = ((\lambda_j - \lambda_i)a_{i,j})$$

1. Une matrice A qui commute avec toutes les autres, commutent avec Δ . On en déduit que A est une matrice diagonale $A = \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$. De plus, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A E_{i,1} - E_{i,1} A = (a_i - a_1) E_{i,1}$. Donc $a_i = a_1$ pour tout i et $A = a_1 I_n$.
Réciproquement, la matrice d'une homothétie commute avec toutes les autres.
2. Une matrice qui commute avec $GL_n(\mathbb{K})$ commute aussi avec $GL_n(\mathbb{K}) + \lambda I_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Une telle matrice A commute avec Δ et donc est une matrice diagonale.
De plus, $A(E_{i,1} + E_{1,i}) - (E_{i,1} + E_{1,i})A = (a_i - a_1)(E_{i,1} - E_{1,i})$. On en déduit que A est encore une matrice diagonale.
4. Une telle matrice A commute avec $E_{i,j} - E_{j,i}$, donc avec $(E_{i,j} - E_{j,i})^2 = -(E_{i,i} + E_{j,j})$.
On en déduit que A commute avec

$$(E_{1,1} + E_{2,2}) + \dots + (n-1)(E_{1,1} + E_{n-1,n-1}) = \text{Diag}\left(\frac{n(n-1)}{2}, 1, 2, n-1\right)$$

Si $n \geq 3$, A commute avec une matrice diagonale de diagonale des scalaires deux à deux distincts, donc A est diagonale. On reprend alors le calcul précédent : $A(E_{i,1} - E_{1,i}) - (E_{i,1} - E_{1,i})A =$

$(a_i - a_1)(E_{i,1} + E_{1,i})$. on en déduit que A est encore une homothétie.

Si $n = 2$, une matrice antisymétrique s'écrit $\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha B$. Il faut et il suffit que A commute avec B pour qu'elle commute avec toutes matrices antisymétriques.

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on trouve $a = d$ et $b = -c$. La condition est encore équivalente à $A \in \text{Vect}(I_2, B)$.

Solution 4. On calcule la matrice de φ dans la base canonique :

$$E_{i,j}A = E_{i,j} \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} E_{k,l} = \sum_{1 \leq l \leq n} a_{j,l} E_{i,l}.$$

On en déduit que la coordonnée en $E_{i,j}$ vaut $a_{j,j}$. La trace de φ est la somme de ces coefficients pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\text{tr } \varphi = n \times \text{tr } A$.

Solution 5. Pour tous entiers $i, j \in \mathbb{N}$, on écrit $i + j$ la somme modulo n . Soit $E_{k,l} = (\delta_{i,k} \delta_{l,j})$ un vecteur de la base canonique.

On pose $A = \frac{1}{2} E_{i,j} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r-1} E_{i+m, j+m}$ et $B = \frac{1}{2} E_{i,j} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r-1} E_{i+m, j+m}$. Les vecteurs colonnes de ces deux matrices montrent qu'elles sont de rang r et $E_{i,j} = A + B$. L'ensemble des matrices de rang r est donc une famille génératrices, on peut en extraire une base.

Solution 6.

1. On a $J_n^2 = nJ_n$ et la relation montre que $K_n(K_n - (n-2)I_n) = (n-1)I_n$ et donc K_n est inversible d'inverse $\frac{1}{n-1}(K_n - (n-2)I_n)$.
2. Si $b = 0$, alors A n'est pas inversible puisque J_n est de rang 1. On suppose par la suite que $b \neq 0$. On cherche l'inverse de A sous la forme $a'J_n + b'I_n$.

$$(aJ_n + bI_n)(a'J_n + b'I_n) = (naa' + ab' + a'b)J_n + bb'I_n$$

On choisit $b' = \frac{1}{n}$ et on cherche a' tel que

$$naa' + \frac{a}{b} + a'b = 0 \Rightarrow a' = \frac{-a}{b^2 + nab}, \text{ si } b^2 + nab \neq 0$$

On a donc montré que A est inversible si $b \neq 0$ et $b + na \neq 0$. Il reste à vérifier que si $b + na = 0$, alors A n'est pas inversible, mais alors le vecteur $(1, \dots, 1)$ appartient clairement au noyau.

Solution 7.

1. L'application $P \mapsto P(X+1)$ dans la base canonique.
2. La matrice de $P \mapsto P(X-1)$.

Solution 8.

1. On trouve $A \left(\sum_{k=0}^{p-1} N^k \right) = I_n - N^p = I_n$. D'où $A^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} N^k$.
2. Soit $J = (\delta_{i+1,j})$. On a $B = I_n + aJ$ et $C = I_n + aJ + \dots + a^{n-1}J^{n-1}$ avec $J^n = 0$. D'où $C^{-1} = I_n - aJ$ et $B^{-1} = I_n - aJ + \dots + a^{n-1}(-1)^{n-1}J^{n-1}$

Solution 9.

1. On écrit $A = (C_1, \dots, C_n)$, C_i i-ème vecteur colonne. Alors la famille est de rang 1, donc il existe un indice i_0 , $C_{i_0} \neq 0$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe α_i tel que $C_i = \alpha_i C_{i_0}$. On pose $X = C_{i_0} = (c_1, \dots, c_n)^T$ et $Y^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

2. Comme $Y^T X = \sum \alpha_i c_i = \text{tr } A$, on a

$$A^2 = XY^T XY^T = X(Y^T X)Y^T = \text{tr } A A.$$

3. Il faut que $\text{tr } p = 1$ (cours) et cal suffit d'après la question précédente.

4. En effet, c'est encore 2/ qui donne la relation.

Solution 10. On remarque que ces deux matrices ont même trace et même déterminant. Mais $A - 2I_3$ est de rang 2 et $B - 2I_3$ est de rang 2. on en déduit que A et B ne sont pas semblables.

Solution 11. On écrit $R = P + iQ$ telle que $A = R^{-1}BR \iff RA = BR$.

On en déduit que $PA = BP$ et $QA = BQ$. Ni P , ni Q ne sont censées être inversibles. Mais $\det(P+iQ) \neq 0$ montre que le polynôme $\det(P+xQ)$ n'est pas le polynôme nul, donc il existe un réel x tel que $P+xQ$ est inversible.

Solution 12. Si A inversible, $A^2 = -I$. D'où $(\det A)^2 = -1$, ce qui est impossible. Donc $\text{rg } A \leq 2$.

Comme $A \neq 0$, il existe e_1 tel que $Ae_1 \neq 0$.

La famille (e_1, Ae_1) est libre, sinon $f(e_1) = \lambda e_1$, avec $\lambda \neq 0$ et

$$A^3 e_1 = \lambda^3 e_1 = -\lambda e_1$$

ce qui impliquerait $\lambda^2 = -1$ impossible dans \mathbb{R} . Ceci étant valable pour tout e_1 on peut l'appliquer à Ae_1 et $(Ae_1, A^2 e_1)$ est libre, c'est une base de l'image. A restreint à l'image est un isomorphisme, donc image et noyau sont en somme directe, on prend e_3 base du noyau (le rang $A < 3$). Dans la base $(e_3, Ae_1, A^2 e_1)$ la matrice obtenue est de la forme attendue.

Solution 13. On pose $r = \text{rg } f$, et si (e_1, \dots, e_n) est la base canonique, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de l'image de f . On peut en extraire une base de l'image de f . Quitte à renuméroter, on suppose $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ base de l'image. Comme $f^2 = 0$, c'est aussi une famille libre du noyau. On complète en une base du noyau $(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_{r+1}, \dots, e'_{n-r})$. Par construction $\text{vect}(e_1, \dots, e_r) \cap \ker f = \{0\}$. On en déduit que

$$(f(e_1), \dots, f(e_r), e'_{r+1}, \dots, e'_{n-r}, e_1, \dots, e_r)$$

est une base de E et la matrice de f dans cette base est de la forme demandée.

Solution 14. On procède par récurrence sur n . Si $n = 1$, alors $A = 0$.

Si le résultat est vrai pour n et supposons $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Si A est une homothétie, alors $A = 0$, sinon, il existe X tel que AX et X non colinéaires et on complète (X, AX) en une base de \mathbb{R}^n et dans cette base la matrice s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A' \end{pmatrix}$, mais A' est encore de trace nulle et on applique l'hypothèse de récurrence : la trace de A' est encore nulle, donc il existe $P' \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $B' = P'^{-1}A'P'$ a tous ses éléments diagonaux nuls.

Ensuite, on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$ et on vérifie que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B' \end{pmatrix}$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls. Par récurrence, on a montré le résultat pour tout $n \geq 1$.

Solution 15.

1. La trace est une forme linéaire vérifiant $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Le noyau contient la famille des matrices de la forme $AB - BA$. En particulier, le noyau contient les matrices de la forme

$$E_{i,j}E_{j,k} - E_{j,k}E_{i,j} = E_{i,k} - \delta_{k,i}E_{j,j}.$$

On en déduit que

- pour $i \neq k$, $E_{i,k} \in \{AB - BA, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$
- pour $i = k = 1$ et $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $E_{1,1} - E_{j,j} \in \{AB - BA, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$.

La famille $(E_{i,k}, E_{1,1} - E_{j,j} \mid (i,j,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3, i \neq k, j \neq 2)$ est libre de cardinal $n^2 - 1$. Par dimension, elle engendre $\ker \text{Tr}$.

2. On sait que $\ker \Psi$ est un hyperplan qui contient $\{AB - BA, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$. On en déduit comme précédemment que $\ker \Psi = \ker \text{Tr}$. Deux formes linéaires qui s'annulent sur un même hyperplan sont proportionnelles.
3. (a) On a montré dans l'exercice précédent que toute matrice M de trace nulle est semblable à une matrice M' dont tous les éléments de la diagonale sont nuls : il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $M' = P^{-1}MP$.
S'il existe A' et B' telles que $M' = A'B' - B'A'$, alors $M = AB - BA$ avec $A = PA'P^{-1}$ et $B = PB'P^{-1}$.
- (b) Les matrices dont tous les éléments diagonaux sont nuls forment un espace vectoriel \mathcal{D} de dimension $n^2 - n$.
On étudie le noyau de $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), X \mapsto \Delta X - X\Delta$ avec $\Delta = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$. Si $\varphi(X) = (y_{i,j})$, on a $y_{i,j} = (i-j)x_{i,j}$, d'où $\ker \varphi$ est exactement les matrices diagonales, espace de dimension n , donc l'image est de dimension $n^2 - n$ et est inclus dans \mathcal{D} , c'est \mathcal{D} .
- (c) On vient de montrer que si M' est de diagonale nulle, M' peut s'écrire $M' = A'B' - B'A'$. D'après 3.a, on peut conclure.

Solution 16. On calcule $A^2 = A + 2I_3$. Soit $P = X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$. On fait la division euclidienne de X^n par P : $X^n = QP + a(X - 2) + b(X + 1)$. En évaluant en 2 et en -1 , on trouve $a = (-1)^n$ et $b = 2^n$. On en déduit que $A^n = a(A - 2I_n) + b(A + I_n)$.

Solution 17. Il est clair que si $M = AB$ comme proposé par l'énoncé, alors

$$\text{rg } M \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B) \leq \min(p, k, p).$$

D'où $\text{rg}(M) \geq \min\{k \in \mathbb{N}, M = AB \text{ avec } A \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{R})\}$.

De plus, si $M = (C_1 \mid \dots \mid C_q)$ est de rang r , alors il existe $E_1, \dots, E_r \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ telles que

$$\text{vect}(C_1, \dots, C_q) = \text{vect}(E_1, \dots, E_r).$$

Soit $B_i \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne coordonnées du vecteur C_i dans la base (E_1, \dots, E_r) .

On pose $A = (E_1 \mid \dots \mid E_r)$ et $B = (B_1 \mid \dots \mid B_q)$. Par construction, $M = AB$ avec $A \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{R})$. On en déduit l'égalité attendue.

Solution 18.

1. Comme $j^2 = j$, j est la matrice d'un projecteur, donc dans une base \mathcal{B} est de la forme $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit P la matrice de passage associée à ce changement de base.
2. Alors $G' = P^{-1}GP$ est encore un groupe. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ un élément de G' . Comme $J_r G' = G' J_r$, on en déduit que $B = 0$ et $C = 0$ (matrices nulles de tailles différentes).
De plus, M est inversible dans G , donc son inverse est de la forme $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$. Mais ceci n'implique en aucun cas que $D = 0$ comme le montre l'exemple $G = \{E_{1,1}, E_{1,1} + E_{2,n}\}$.

Solution 19.

1. La matrice A est la matrice d'un projecteur. Elle est semblable à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. (a) Soit $M' \in G$, alors $M \mapsto M'M$ définit une bijection de G dans lui-même de réciproque $M \mapsto M'^{-1}M$, où M'^{-1} est l'inverse de M' dans G . On en déduit que $M' \sum_{M \in G} M = \sum_{M \in G} M$ (relation *).

On en déduit que $\left(\sum_{M \in G} M \right)^2 = p \sum_{M \in G} M$, d'où le résultat.

- (b) Si $\text{tr} A = 0$, alors $\text{tr} A/p = 0$. La matrice A/p est idempotente de trace nulle. D'après la question 1/, elle est de rang nul. C'est-à-dire $A = 0$.
- (c) $\text{tr} A/p = \text{rg} A/p$ est un entier et $\text{tr} A = p \text{tr}(A/p)$. Ce qui montre que p divise la trace de A .
3. (a) L'ensemble F est un sous-espace vectoriel comme intersection de sous-espaces vectoriels. Montrons que $F = \ker(\frac{1}{p}A - I_n)$: l'inclusion $F \subset \ker(\frac{1}{p}A - I_n)$ est immédiate.

Supposons $x \in \ker(\frac{1}{p}A - I_n)$, alors $\sum_{M \in G} Mx = x$. Pour tout $M' \in G$, la relation $*$ montre que

$$M'x = (M' \sum_{M \in G} M)x = \sum_{M \in G} Mx = x$$

Donc $x \in F$. Comme le rang de $\frac{A}{p}$ est égal à sa trace, on obtient l'égalité attendue.

- (b) Soit $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\theta_p = \frac{2\pi}{p}$. On pose $G_p = \{R(k\theta_p), k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket\}$.
On vérifie que G_p est un sous-groupe de cardinal p isomorphe aux racines p -ième de l'unité.

Solution 20. On pose $y = tx$ et on obtient $\det(A + tB) = 0$ qui est un polynôme en t dont le terme en degré 3 est donné par $\det B = 0$: en effet en posant $A = (C_1 | \dots | C_n)$ et $B = (C'_1 | \dots | C'_n)$

$$\det(A+tB) = t^n \det(C'_1, \dots, C'_n) + t^{n-1} \sum_{i=1}^n \det(C'_1, \dots, C'_{i-1}, C_i, C'_{i+1}, \dots, C'_n) + \text{terme de degré} \leq n-2.$$

C'est un polynôme de degré au plus 2 qui s'annule en $t = \pm 1, 0$ donc c'est le polynôme nul.

Solution 21. On écrit la famille dans la base canonique :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, (X - z_i)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j z_i^{n-j}$$

Le déterminant de la famille dans la base canonique vaut donc

$$\det(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} z_0^n & \binom{n}{0} z_1^n & \dots & \binom{n}{0} z_n^n \\ \binom{n}{1} z_0^{n-1} & \binom{n}{1} z_1^{n-1} & \dots & \binom{n}{1} z_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \dots & \binom{n}{n} \end{vmatrix} = \binom{n}{0} \dots \binom{n}{n} \begin{vmatrix} 1 & z_n & \dots & z_n^n \\ 1 & z_{n-1} & \dots & z_{n-1}^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \dots & \binom{n}{n} \end{vmatrix}.$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde qui vaut $\prod_{i < j} (z_i - z_j) \neq 0$ car les z_i sont deux à deux distincts. La famille \mathcal{B} est libre et par dimension est libre. Donc, c'est une base.

Solution 22.

1. On calcule $P'(X) = nX^{n-1} - 1$ dont on déduit que si z annule à la fois P et P' , alors $z \neq 0$ et $z^{n-1} = \frac{1}{n} < 1$ donc $z^n = \frac{z}{n}$ qui dans P donne $\frac{z}{n} - z + 1 = 0$ et donc $z = \frac{n}{n-1} > 1$, donc il n'existe pas de tel z et P n'admet que des racines simples z_1, \dots, z_n et

$$P(X) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

Le degré 1 ayant un coefficient -1 on a $\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} z_j = (-1)^n$ et le coefficient de degré 0 montre que

$$\prod_{j=1}^n z_j = (-1)^n.$$

2. le déterminant est de la forme $\Delta = \det(a + z_1 e_1, \dots, a + z_n e_n)$ où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{K}^n et $a = \sum e_i$. On développe ce déterminant

$$\Delta = \left(\prod_{j=1}^n z_j \right) \det(e_1, \dots, e_n) + \sum_{i=1}^n \left(\left(\prod_{j \neq i} z_j \right) \det(e_1, \dots, a, \dots, e_n) \right) = 2 \times (-1)^n$$

Solution 23.

1. On développe le déterminant suivant la première colonne :

$$\det A = a \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

En notant $T_n(a, b, c)$ le déterminant, on a

$$T_n(a, b, c) = aT_{n-1}(a, b, c) - bcT_{n-2}(a, b, c)$$

sachant que

$$T_2(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - bc, \quad T_3(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & a & c \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a^3 - 2abc.$$

La suite $T_n(a, b, c)$ est définie par une relation linéaire d'ordre 2 que l'on sait exprimer en fonction de n en posant $T_0(a, b, c) = 1$ et $T_1(a, b, c) = a$.

2. Par exemple si $b = c = 1$ et $a = 2 \cos \theta$, alors l'équation caractéristique de

$$T_n = 2 \cos \theta T_{n-1} - T_{n-2}$$

admet pour racines complexes conjuguées non réelles $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. On obtient $T_n = A \cos n\theta + B \sin n\theta$ avec $T_0 = 1$ et $T_1 = 2 \cos \theta$, d'où

$$T_n = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta}.$$

Par continuité du déterminant T_n en θ , on en déduit que $T_n = n + 1$ si $\theta = 0$ c-à-d si $a = 2$ et $T_n = (-1)^{n+1}(n + 1)$ si $\theta = \pi$ c-à-d si $a = -2$.

Solution 24. On multiplie chaque colonne par $a_n + b_j$, $1 \leq j \leq n$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \ddots & & \frac{1}{a_2 + b_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n + b_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_n + b_1) \cdots (a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{a_n + b_1}{a_1 + b_1} & \frac{a_n + b_2}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{a_n + b_n}{a_1 + b_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{a_n + b_1}{a_{n-1} + b_1} & \ddots & & \frac{a_n + b_n}{a_{n-1} + b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

et on retranche la dernière ligne aux précédentes en remarquant que

$$\frac{a_n + b_j}{a_i + b_j} = 1 + \frac{a_n - a_i}{a_i + b_j}$$

et le déterminant devient

$$\frac{1}{(a_n + b_1) \cdots (a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{a_n - a_1}{a_1 + b_1} & \frac{a_n - a_1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{a_n - a_1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & & \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} + b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

On factorise chaque ligne $1 \leq i \leq n-1$ par $(a_n - a_i)$ et on soustrait la dernière colonne

$$\frac{(a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1) \cdots (a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{b_n - b_1}{(a_1 + b_1)(a_1 + b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_1 + b_{n-1})(a_1 + b_n)} & \frac{a_n - a_1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{b_n - b_1}{(a_{n-1} + b_1)(a_{n-1} + b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_{n-1} + b_{n-1})(a_{n-1} + b_n)} & \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} + b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Enfin, on développe suivant la dernière ligne et on factorise chaque ligne i par $\frac{1}{a_i + b_n}$ et chaque colonne j par $b_n - b_j$ et on obtient que le déterminant Δ_n au rang n vaut

$$\Delta_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^n (a_n + b_i) \prod_{i=1}^n (b_n + a_i)} \times \Delta_{n-1}$$

et on conclut par récurrence.

Comme dans Vandermonde (si les a_i et les b_i sont deux à deux distincts), on peut calculer beaucoup plus rapidement le déterminant de Cauchy, mais c'est hors programme car utilise les polynômes à deux variables : on considère Δ comme une fraction rationnelle en $X = a_n$ et $Y = b_n$. Alors Δ_n s'annule en chaque $X = a_i$ et $Y = b_i$ donc le numérateur se factorise par le produit des $(X - a_i)$ et $(Y - b_j)$, le dénominateur étant le produit des $(X + a_i)$ et des $(Y + b_j)$, le coefficient constant étant donné par Δ_{n-1} .

Solution 25.

1. Si (E_1, \dots, E_l) est une base d'un sous-espace vectoriel tel que tout élément non nul est inversible. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$. $(E_1 X, \dots, E_l X)$ est liée, $(\lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_l) X = 0$ et comme $\lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_l$ est soit la matrice nulle, soit inversible, on en déduit que $X = 0$ et donc pour $X \neq 0$, $(E_1 X, \dots, E_n X)$ est libre. On en déduit que $l \leq n$.
2. L'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ convient et est de dimension 2. On en déduit que $d_2 = 2$.
3. Si n est impair, on suppose qu'il existe deux matrices A et B non liées. Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on sait que $\det A + \lambda B$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $\det B$. Ce polynôme admet une racine dans \mathbb{R} , ce qui contredit $\text{vect}(A, B) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R}) \cup 0$.
4. Si A est une matrice de la forme annoncée, $AA^T = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_n$. On en déduit $d_4 = 4$.

Solution 26.

1 Si A est inversible, alors $\text{Com}(A)$ aussi et on en déduit que $\text{rg } A = \text{rg } \text{Com}(A)$.

Si A est de rang $n-2$, alors tous les mineurs $(n-1) \times (n-1)$ sont nuls et $\text{Comm}(A) = 0$.

Si A est de rang $n-1$, montrer que $\text{Com}(A)$ est non nulle et comme $\text{Comm}(A)^T A = \det(A)I_n = 0$, le rang de $\text{Com}(A)$ est au plus 1 donc exactement 1.

2. Si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ et donc $a = d$ et $b = -c$: $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$.

Sinon, les matrices A et $\text{Comm}(A)$ ont même rang.

Si A est de rang $\leq n - 2$, alors $A = \text{Com}(A) = 0$.

Si A est de rang $n - 1$, le rang de $\text{Com}(A)$ est 1 ; il n'y a pas de solution.

Si A est inversible, alors on a $A^T A = \det(A) I_n$ d'où $(\det A)^{n-2} = 1$; dont on déduit $\det A = \pm 1$. Mais la trace de $A^T A \geq 0$ donc $\det A = 1$. Et réciproquement, si $A^T A = I_n$ et $\det A = 1$, on a bien égalité.

Solution 27. En posant $X = 0$, on obtient $\det A = 0$.

Ensuite, A a un noyau non trivial, soit H un supplémentaire respectif de $\ker A$, G un supplémentaire de $\text{Im } A$ et X la matrice de l'application envoie $\ker A$ sur G et H sur 0. Si $A \neq 0$, alors X n'est pas inversible et $A + X$ l'est d'où une contradiction, donc $A = 0$.

Prendre $X - B$ donne $A - B = 0$.

Solution 28. Procéder par récurrence sur n et développer suivant une ligne, puis majorer avec l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence.

Solution 29.

1. On ajoute les lignes puis les colonnes

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix} = \det(A-B) \det(A+B)$$

2. On peut écrire

$$\begin{vmatrix} I_n & I_n \\ 0 & i_n I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & i I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} iA-B & 0 \\ -iB & iA+B \end{vmatrix} = \det(iA-B) \det(iA+B)$$

dont on déduit $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = \det(A+iB) \det(A-iB) \geq 0$ car de la forme $z\bar{z}$.

3. On a dans ce cas, comme déjà vu, $(A+iB)(A-iB) = A^2 + B^2$.

4. Prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^T$.

5. Si A est inversible, on écrit

$$\begin{vmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ A^{-1}B & AD - CB \end{vmatrix} = \det(AD - CB)$$

Si A n'est pas inversible, on commence par appliquer le résultat à $A - xI_n$ qui commute avec C et est inversible pour $0 < x < \inf\{|\lambda|, \lambda \in \text{Spec}(A) \setminus \{0\}\}$ et par continuité, on en déduit l'égalité pour tout A . $\text{Spec}(A)$ est l'ensemble des racines de du polynôme $\det(A - \lambda I_n)$.