

Réduction des matrices

1 Éléments propres - diagonalisation

Exercice 1. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_4(\mathbb{K})$.

La matrice B possède-t-elle des sous-espaces stables de dimension 3 ?

Exercice 2. Diagonaliser si possible les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. ♡ Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que AB est diagonalisable. Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 4. ♡ Calculer $\chi_{A^{-1}}$ le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 5. * Soit $E = l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées et $\Delta : E \rightarrow E$, $u = (u_n) \mapsto \Delta(u) = (\Delta(u)_n)$ définie par

$$\Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n.$$

Déterminer les valeurs propres de Δ .

Exercice 6. Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et I l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe la primitive de f qui s'annule en 0. Trouver les valeurs propres de I .

Exercice 7. ♡ Soit $n \geq 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^3 . En déduire que A est diagonalisable et trouver les éléments propres.

Exercice 8. ♡* Diagonaliser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 9. ♡♡* Pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, soit la matrice

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1, 0, 0)$ la matrice identité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$. Diagonalisez astucieusement $M(a, b, c)$.

Exercice 10. ♡♡** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & -I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de M en fonction de A et de n .
2. Que dire sur le rang de M si A est diagonalisable ?
3. La matrice M peut-elle être diagonalisable ?

Exercice 11. ♡♡** Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable ssi A est diagonalisable et $1 \notin \text{Spec}(A)$.

Exercice 12. ♡♡*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les éléments propres de B en fonction de ceux de A .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 13. ♡♡* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Pour $A \in E$, on introduit $\Psi : E \rightarrow E$ défini par

$$\Psi(M) = AM.$$

1. Montrer que A et Ψ ont même valeurs propres et préciser les sous-espaces propres de Ψ en fonction de ceux de A .
2. Montrer que Ψ est diagonalisable ssi A l'est.

2 Matrices trigonalisables

Exercice 14. * Que dire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $\det f = \text{tr } f = 0$?

Exercice 15. ♡ Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^n .

Exercice 16. ** Montrer qu'une matrice trigonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable dans une base orthonormée.

Exercice 17. ♡♡*

1. Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant même spectre et même sous-espaces propres sont-elles nécessairement semblables ?
2. Et si elles sont trigonalisables ?
3. Et si elles sont diagonalisables ?

3 Polynômes d'endomorphismes

Exercice 18. ♡♡* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note P_A son polynôme caractéristique.

1. Montrer que si P_A est scindé, alors P_{A^k} l'est pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si P_{A^2} est scindé à racines toutes positives alors P_A est scindé.
3. Donner un exemple où P_A n'est pas scindé, mais P_{A^3} l'est.

Exercice 19. ** Soit F une sous-algèbre de $M_n(K)$, contenant au moins un élément de $GL_n(K)$. Montrer que $F \cap GL_n(K)$ est un sous-groupe de $GL_n(K)$.

Exercice 20. ♡♡* Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 est diagonalisable et $\ker u = \ker u^2$.

Exercice 21. ♡* Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On note $H_f = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ u = 0\}$. Montrer que H_f est un sous-espace vectoriel dont on donnera la dimension.
2. Soit F l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $u \mapsto f \circ u$. Montrer que F et f ont même valeurs propres et que F est diagonalisable ssi f l'est.

Exercice 22. ♡ Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 12 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ et montrer que ce sont exactement les polynômes en A .

Exercice 23. ♡♡ * Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et montrer que ce sont exactement les polynômes en A .

4 Autres classiques

Exercice 24. ♡♡** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est nilpotente si et seulement si son spectre est réduit à $\{0\}$.
2. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\text{tr}(A) = \dots = \text{tr}(A^n) = 0$.
3. On suppose $\text{tr}(A) = \dots = \text{tr}(A^{n-1}) = 0$. Montrer que A est nilpotente ou diagonalisable.

Exercice 25. ♡♡** On désigne par E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, f, g deux endomorphismes de E et α un réel non nul. On suppose que $f \circ g - g \circ f = \alpha f$.

1. Calculer $f^k \circ g - g \circ f^k$ en fonction de k, α et f .
2. On définit l'application Ψ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ en posant $\Psi(h) = h \circ g - g \circ h$. Que dire de f^k par rapport à Ψ ?
3. Montrer que f est un endomorphisme nilpotent.

Exercice 26. ♡* Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$. On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel stable non nul de u .

1. L'endomorphisme a-t-il des valeurs propres?
2. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{O_E\}$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E . Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base?
3. Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de x .
4. Existe-t-il de tels endomorphismes?

Exercice 27. ♡* Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = 0_n, B \neq 0, p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $I_n + a^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
2. On pose

$$H = \{I_n + P(B) \mid P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}.$$

Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.

Exercice 28. ♡♡**

1. Ici $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$. Montrer que pour toutes matrices carrées A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ (Commencer par le cas A inversible)
2. Ici, $\mathbb{K}$ est un corps quelconque. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $\lambda^p \chi_{AB} = \lambda^n \chi_{BA}$.
On pourra considérer la matrice de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ $M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix}$.

Exercice 29. ♥♥♥*** Soit E $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ base de E . Une matrice est cyclique si elle est la matrice d'un endomorphisme cyclique.

1. Vérifier qu'une matrice A est cyclique ssi elle est semblable à une matrice compagnon.
2. Montrer que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout $x \in E$, l'ensemble

$$I_{u,x} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$$

est un idéal principal dont on notera le générateur unitaire $\pi_{u,x}$.

3. Soit π_u le polynôme minimal unitaire de $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer qu'il existe $x \in E$, tel que $\pi_u = \pi_{u,x}$.
4. Montrer qu'une matrice est cyclique ssi son polynôme minimal et caractéristique coïncident.
5. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, une matrice est cyclique ssi tous ses espaces propres sont de dimension 1.
6. Une matrice A est cyclique ssi $\mathbb{K}[A] = C(A)$ où $C(A)$ est le commutant de A .

Exercice 30. ♥♥** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle. On note G_M l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que λM soit semblable à M .

1. Quelle est la structure de G_M ?
2. Montrer que si M n'est pas nilpotente, G_M est fini.
3. Déterminer G_M pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Que se passe-t-il si $M^n = 0$ et $M^{n-1} \neq 0$?

Exercice 31. ♥♥** Soit E un ev de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $S_u(x) = E$. Que peut-on dire sur μ_u ?
2. On suppose que u est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $E = S_u(x)$.

Réduction des matrices.

(Solutions)

Solution 1. La matrice B est diagonale par blocs. Pour $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $B = \text{Diag}(C, -C)$.

Ainsi, on a $\chi_B(X) = \chi_C(X)\chi_{-C}(X) = (X^2 + 0 + 1)(X^2 + 0 + 1) = (X^2 + 1)^2$.

Pour F un sous-espace stable par B , on sait que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur F est de degré $\dim(F)$ et divise χ_B .

- Si le corps $\mathbb{K}$ possède un nombre r tel que $r^2 = -1$ (par exemple $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$), on a alors $\chi_B(X) = (X - r)^2(X + r)^2$. Dans ce cas χ_B possède des diviseurs de degré 3.

Dans un tel corps, le polynôme caractéristique de la matrice C est $(X - r)(X + r)$. Ainsi, les matrices C et $-C$ possèdent des vecteurs propres pour les valeurs propres r et $-r$.

En prenant $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, où $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de C , F est alors un sous-espace

stable par B de dimension 3.

- Si dans le corps $\mathbb{K}$ le nombre -1 n'est pas un carré (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$), alors χ_B ne possède que des diviseurs de degré 0, 2 et 4. La matrice B ne possède ainsi pas de sous-espaces stables de dimension 3.

Solution 2. Les matrices A , B , C sont diagonalisables et respectivement semblables à $\text{Diag}(0, 2, -2)$, $\text{Diag}(0, 3, 3)$ et $\text{Diag}(2, 2, 2, -2)$ de matrices de passages

$$P_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution 3. Comme AB est diagonalisable et A inversible, alors $BA = A^{-1}(AB)A$ est semblable à AB . Ainsi, la matrice BA est aussi diagonalisable.

Solution 4. On trouve $\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \frac{(-1)^n}{\det A} \chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Solution 5. Si $\Delta(u) = \lambda u$, on a pour tout n : $u_{n+1} - u_n = \lambda u_n$, d'où $u_n = (1 + \lambda)^n u_n$ et cette suite est bornée ssi $\lambda \in [-2; 0]$.

Solution 6. Une fonction f telle que $\int_0^x f(t) dt = \lambda f(x)$ avec $\lambda \neq 0$ donne $f(x) = \lambda f'(x)$ d'où $f(x) = \alpha e^{\lambda^{-1}x}$ et comme la primitive s'annule en 0, il n'y a pas de solution.

Solution 7. Remarquons que $A^3 = A$. De plus, A est de rang 2.

Les valeurs propres sont 0, 1 et -1 . On a $E_0 = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1})$. Pour identifier simplement E_1 et E_{-1} , pensez que ce sont des sous-espaces de $\text{Im } f$. On trouve $E_1 = \text{Vect}(e_1 + 2e_2 + \dots + 2e_{n-1} + e_n)$ et $E_{-1} = \text{Vect}(e_1 - e_n)$.

On en déduit que A est diagonalisable. On a $\chi_A = (X^2 - 1)X^{n-2}$.

Solution 8. $M - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 et $E_1 = \ker(M - I_n)$ est de dimension $n - 2$ de base

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right) = (e_2 - e_3, \dots, e_2 - e_n).$$

Puis on résoud $(M - I_n)X = \lambda X$ avec ${}^tX = (x_1, \dots, x_n)$ pour $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_2 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_i \text{ pour } i \geq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda - \frac{n-1}{\lambda} = 0 \\ x_1 = \lambda x_i \text{ pour } i \geq 2 \end{cases}$$

dont on déduit deux autres valeurs propres pour $M - I_3$: $\lambda = \pm\sqrt{n-1}$ et de vecteur propre associé ${}^tX = (1, \frac{1}{\lambda}, \dots, \frac{1}{\lambda})$.

Les valeurs correspondantes pour M sont $1 + \lambda$.

On peut aussi écrire la matrice M' de $M - \lambda I_n$ dans la base $(e_1, e_1 + \cdots + e_n, e_2 - e_3, \dots, e_2 - e_n)$:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et on étudie le bloc } 2 \times 2.$$

Solution 9. Avec les notations de l'énoncé, $K = M(0, 0, 1) = J^2$ et $M(a, b, c) = aI_3 + bJ + cJ^2$.

Pour diagonaliser $M(a, b, c)$, il suffit de diagonaliser J . Pour cela :

$$1. \text{ Pour } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ on a : } \det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

D'où $\chi_J(X) = X(X^2 - 2)$. Le spectre de la matrice J est donc $\text{spec } J = \{0, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

On remarque que l'on a

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\vec{u}}.$$

La résolution des équations $JX = \sqrt{2}X$ et $JX = -\sqrt{2}X$ nous donne deux autres vecteurs propres :

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{v}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{v}}, J \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{w}} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{w}}.$$

Les sous-espaces propres de la matrice J sont donc $\text{Ker}(J - 0I) = \text{Vect}(\vec{u})$, $\text{Ker}(J - \sqrt{2}I) = \text{Vect}(\vec{v})$ et $\text{Ker}(J + \sqrt{2}I) = \text{Vect}(\vec{w})$. La matrice J est donc diagonalisable.

2. Soit P la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) vers la base (u, v, w) . On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Avec cette matrice P , on obtient :

$$P^{-1} \cdot J \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} \cdot K \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a + b\sqrt{2} + 2c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + 2c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le spectre de la matrice $M(a, b, c)$ est donc $\{a, a + b\sqrt{2} + 2c, a - b\sqrt{2} + 2c\}$.

Solution 10.

1. Résolvons le système

$$\begin{pmatrix} A & -I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} AX = Y \\ AY = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X \in \ker A^2 \\ AX = Y \end{cases}$$

On en déduit un isomorphisme $\ker A^2 \rightarrow \ker M$, $X \mapsto \begin{pmatrix} X \\ AX \end{pmatrix}$. Donc le rang de M vaut $n + \text{rg } A^2$.

On peut aussi utiliser les opérations sur les lignes et les colonnes :

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0 & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Si A est diagonalisable, alors $\dim \ker A = \dim \ker A^2$ et donc $\text{rg } M = n + \text{rg } A$.

3. Si M est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule M

$$P(M) = 0 = \begin{pmatrix} P(A) & -P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

Donc, $P(A) = P'(A) = 0$ et A est diagonalisable, toute valeur propre de A est valeur propre double de A , ce qui est absurde. La matrice M n'est pas diagonalisable.

On peut faire un raisonnement plus simple : si M est diagonalisable, alors le rang de M est égal au rang de M^2 ; or

$$M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A \\ 0 & A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -2I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Donc $\text{rg } M = \text{rg } A^2 + n \leq 2\text{rg } A$. On en déduit que A est inversible. Mais c'est absurde, car A possède une valeur propre dans $\mathbb{C}$, et $M - \lambda I_n$ n'est pas diagonalisable et M non plus.

Ou encore, si on sait que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable : on prend $\lambda \in \text{Spec } A$ et $X \in E_\lambda(A)$. Alors les vecteur $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$ sont stables par M et le "morphisme induit par M sur ce plan rapporté à cette base pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable.

Solution 11. On pose $Q = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ et on calcule

$$B' = Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

Si P est un polynôme, $P(B') = \begin{pmatrix} P(A) & * \\ 0 & P(I_n) \end{pmatrix}$. Si B' admet un polynôme annulateur scindé à racines simples P , alors $P(A) = 0$ dont on déduit que A est diagonalisable.

De plus, le rang de $B' - I_{2n} = \begin{pmatrix} A - I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vaut exactement n . On en déduit que la multiplicité de la valeur propre 1 dans le polynôme caractéristique $\chi_B = \chi_A \times (X - 1)^n$ est n . Ce qui montre que 1 n'est pas racine de χ_A , ce que nous voulions.

Réciproquement, Si A est diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre. Soit $\lambda \in \text{Spec} A$, la dimension de $E_\lambda(A) = n_\lambda$ la multiplicité de la racine λ dans χ_A . Or On a un morphisme injectif $E_\lambda(A) \rightarrow E_\lambda(B')$, $X \mapsto \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\dim E_\lambda(B') \geq n_\lambda$. De plus, nous avons déjà remarqué que $\dim E_1(B') = n$. Donc la dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des racines. Le polynôme χ_B étant scindé, on en déduit que B' est diagonalisable.

Solution 12.

1. Soit $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, alors $BZ = \begin{pmatrix} Y \\ AX \end{pmatrix}$. Donc

$$BZ = \lambda Z \iff \begin{cases} Y = \lambda X \\ AX = \lambda Y \end{cases} \iff \begin{cases} Y = \lambda X \\ AX = \lambda^2 X \end{cases}$$

X doit être un vecteur propre associé à une valeur propre strictement positive de A ; la condition est nécessaire d'après ce qui précède, elle est clairement suffisante.

On peut aussi remarquer que $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ montre que si B est diagonalisable, alors A l'est avec une diagonale positive. De plus, $\text{rg } B = \text{rg } B^2$. Et comme $\text{rg } B = \text{rg } A + n$, on en déduit $\text{rg } A = n$. Ce qui montre que les valeurs propres sont strictement positives.

Réciproquement, si A est diagonalisable de diagonale strictement positive, alors il existe un polynôme minimal scindé à racines simples ($\neq 0$) qui annule A . Les racines étant non nul, alors $P(X^2)$ est encore un polynôme scindé à racines simples qui annule B , donc B est diagonalisable.

Solution 13. 1/ Soit λ tel que $AV = \lambda V$, $V \in \mathcal{M}_{n,1}$, alors $M = (V | \dots | V)$ est vecteur propre de Ψ de valeur propre λ .

Réciproquement, si $M(C_1 | \dots | C_n)$,

$$AM = \lambda M \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad AC_i = C_i \iff M = (C_1 | \dots | C_n) \in E_A(\lambda)^n.$$

On en déduit que $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(\Psi)$ et $\dim E_\psi(\lambda) = n \times \dim E_A(\lambda)$.

2/ On en déduit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de A vaut $\dim E$ ssi la somme de la dimension des sous-espaces propres de Ψ vaut $\dim \mathcal{L}(E)$, d'où le résultat.

Solution 14. Son polynôme caractéristique est X^2 , donc f est nilpotente trigonalisable. Dans une base adaptée la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution 15.

1. On écrit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - I_3 = B - I_3$ et B est nilpotente : $\chi_B = X^3$. Donc A n'est pas diagonalisable.

2. B et I_3 commutent : $A^n = (-1)^n \left(I - nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \right)$.

Solution 16. Procéder par récurrence.

Solution 17. Pour les questions 1/ et 2/ la réponse est non, comme le montre l'exemple suivant : Les

matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes de même noyau, mais leurs indices

de nilpotence diffèrent. Elles ne sont pas semblables.

Si A est diagonalisable, l'hypothèse même sous-espace propre est ambiguë : une base de diagonalisation est certes commune aux deux matrices, mais les sous-espaces propres sont-ils associés aux mêmes valeurs propres ? Si $A = \text{Diag}(1, 2, 2)$ et $B = \text{Diag}(1, 1, 2)$, alors les sous-espaces propres sont les mêmes, mais pas associés aux mêmes valeurs propres. Il est clair que A et B ne sont pas semblables.

Solution 18.

1. Si P_A est scindé, alors A est trigonalisable, donc A^k aussi et P_{A^k} est scindé.
2. On sait que A est scindé dans $\mathbb{C}$ et si λ est une valeur propre (complexe), alors λ^2 est valeur propre de A^2 , donc un réel positif, et les racines carrées d'un réel positif a sont $\pm\sqrt{a}$, donc toutes les racines de P_A sont réelles : P_A est scindé dans $\mathbb{R}$.

3. Il suffit de prendre une rotation d'axe z et d'angle $2\pi/3$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I_3$.

Solution 19. La seule difficulté est de montrer que l'inverse reste dans F : le théorème de Cayley-Hamilton montre que si A est inversible, alors A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A .

Solution 20. Il est clair que si u est diagonalisable, alors u^2 l'est et $E_0(u) = E_0(u^2)$.

Réciproquement, si u^2 est diagonalisable, il existe un polynôme simplement scindé $p = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ tel que $p(u^2) = 0$. Mais alors $p(X^2)$ annule u et $p(X^2) = \prod_{i=1}^r (X^2 - \lambda_i)$. De plus, on a

$$\bigoplus_{i=1}^r \ker(u^2 - \lambda_i \text{id}) = E$$

Si $\lambda_i \neq 0$, le théorème des noyaux nous dit que $\ker(u^2 - \lambda_i \text{id}) = \ker(u - \alpha_i \text{id}) \oplus \ker(u + \alpha_i \text{id})$ où $\alpha_i^2 = \lambda_i$. On en déduit que

$$E = \ker u^2 \bigoplus_{i=1}^r (\ker(u - \alpha_i \text{id}) \oplus \ker(u + \alpha_i \text{id}))$$

Donc E est somme directe de des sous-espaces propres de u si et seulement si $\dim \ker u^2 = \dim \ker u$. Mais comme $\ker u \subset \ker u^2$, on a l'égalité.

Solution 21.

1. On sait que $f \circ u = 0$ ssi $\text{Im } u \subset \ker f$, donc u induit une application de $\mathcal{L}(E, \ker f)$ qui est isomorphe à H_f , ce qui montre bien que H_f est un sous-espace vectoriel et que $\dim H_f = n \dim \ker f$.
2. Si $\lambda \in \text{Spec}(f)$ de vecteur propre associé v , une projection p_v sur $\mathbb{K}v$ vérifie $F(p_v) = f \circ p_v = \lambda p_v$. Si $\lambda \in \text{Spec}(F)$, u est un vecteur propre associé λ ssi $F(u) = \lambda u$ ssi $f \circ u - \lambda u = 0$ ssi $(f - \lambda \text{Id}) \circ u = 0$ or $u \neq 0$, donc $\lambda \in \text{Spec}(f)$. Ce qui montre $\text{Spec}(F) = \text{Spec}(f)$.
Si $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ et $F_{\lambda_1}, \dots, F_{\lambda_r}$ les sous-espaces propres de f (resp. F) associés à la valeur propre λ_i , alors on a montré que $F_{\lambda_i} = H_{f - \lambda_i - \text{Id}}$ et donc $\dim F_{\lambda_i} = n \dim E_{\lambda_i}$.
Finalement

$$\dim E = \sum \dim E_{\lambda_i} \iff \dim \mathcal{L}(E) = \sum \dim F_{\lambda_i}$$

ce qui montre bien que f est diagonalisable ssi F l'est.

Solution 22. On calcule $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 12 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$, A est donc diagonalisable et semblable à $D = \text{Diag}(1, 2, 3)$ et le commutant de cette matrice est exactement l'ensemble des matrices diagonales qui est engendré par les polynôme en D , donc le résultat est préservé pour A : le commutant est de dimension 3 est exactement $\mathbb{K}[A]$ qui est de dimension le degré du polynôme minimal annulateur unitaire.

Solution 23. On calcule $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$ et $\text{rg}(A - 3I_3) = 2$, donc A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$: On prend un vecteur propre $e_1 \in E_1$; la matrice étant étant trigonalisable, on prend un vecteur de $e_3 \in \ker(A - 3I_n)^2 \setminus \ker(A - 3I_3)$ et $e_2 = (A - 3I_3)e_3$.

Soit $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ qui commute avec A' . On en déduit $b = c = d = g = h = 0$, $e = i$ et a, e et f dans $\mathbb{R}$. Le commutant est de dimension 3.

Or (I_3, A', A'^2) est libre donc engendre le commutant de M' qui est de dimension 3. Et finalement, le commutant de A est engendré par (I_3, A, A^2) de dimension 3.

Solution 24.

1. Si A est nilpotente, X^p est un polynôme annulateur scindé, donc le spectre de A est inclus dans $\{0\}$ et est non vide : il est réduit à 0.

Réciproquement, si le spectre de A est réduit à 0, alors son polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré n scindé (on est dans $\mathbb{C}$) qui a 0 pour unique racine : c'est donc X^n . D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$, ce qui montre A nilpotente.

2. Comme A est trigonalisable, si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont ses valeurs propres de multiplicité respective $n_1, \dots, n_p$, alors $\text{tr} A^k = \sum_{i=1}^p n_i \lambda_i^k$. En particulier, si A est nilpotente, alors $\text{tr} A^k = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Réciproquement, si $\text{tr} A^k = \sum_{i=1}^p n_i \lambda_i^k = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Quitte à retirer la valeur propre 0 qui n'intervient pas dans le calcul de la trace, on suppose que $\lambda_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$.

Alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \cdots & \lambda_p^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or la matrice $p \times p$ est un déterminant de Vandermonde $\lambda_1 \cdots \lambda_p \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\lambda_j - \lambda_i)$ qui est non nul si les λ_i sont non nuls et deux à deux distincts. On en déduit que le spectre de A est réduit à $\{0\}$.

3. Si on ne suppose pas $\text{tr} A^n = 0$, alors le raisonnement plus haut s'applique sauf si le spectre de A est composé de n complexes deux à deux distincts. Dans ce dernier cas, A est alors diagonalisable.

Solution 25.

1. On procède par récurrence
2. On peut voir f comme un vecteur propre associé à la valeur propre α de l'application $f \mapsto g \circ f - f \circ g$. Et f^k semble un vecteur propre pour tout k .
3. En dimension fini, le spectre d'un endomorphisme est toujours fini. Conclure.

Solution 26.

1. Un vecteur propre engendre un sous-espace stable de dimension 1, donc, u n'a pas de valeur propre.
2. Si $(x, u(x), \dots, u^p(x))$ est liée, alors il engendre un sous-espace stable par u de dimension ≥ 1 . Donc $p \geq n$.
3. On retrouve une matrice compagnon dont le polynôme caractéristique est donné par les coefficients de la dernière colonne.
4. Ce polynôme est indépendant du choix de la base, donc la matrice compagnon ne change pas.
5. Si P n'a pas de racine, alors il faut n pair et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Si λ est une valeur propre complexe de vecteur propre u , alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de vecteur propre $\bar{u}$ et on vérifie que $u + \bar{u}$ et $i(u - \bar{u})$ sont des vecteurs réels qui engendrent un plan stable. Donc $n = 2$.
Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, alors il en existe pour tout n .

Solution 27.

1. On calcule $(I_n + B)(I - B + B^2 + \dots + (-1)^{p-1}B^{p-1}) = I_n$, d'où $I + A^{-1}BA$ est inversible d'inverse $I - A^{-1}BA + A^{-1}B^2A + \dots + (-1)^{p-1}A^{-1}B^{p-1}A$.
2. Il est clair que H est non vide et stable par produit et que la multiplication est commutative. Il faut essentiellement prouver que $I + P(B)$ est inversible dans H : or $P(0) = 0$ montre que $P(B) = a_1B + \dots + a_dB^d$ et la formule du binôme montre que $P(B)^p = 0$ et on applique $1/$ à $P(B)$.

Solution 28.

1. Si A est inversible, alors $\det(\lambda I_n - AB) = \det[A(\lambda I_n - BA)A^{-1}]$ d'où le résultat. Puis si A est quelconque, on sait qu'il existe une suite $(A_k) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers A et les applications $B \mapsto \det(\lambda I_n - AB)$, $B \mapsto \det(\lambda I_n - BA)$ sont des fonctions polynômes donc continues. Par passage à la limite, on en déduit le résultat.
2. On trigonalise sur les colonnes avec λI_n ou I_p le pivot :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & \lambda I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ B & -BA + \lambda I_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

dont on déduit que $\lambda^{n-p}\chi_{BA} = \chi_{AB}$.

Solution 29.

1. On écrit l'endomorphisme u dans la base $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$.
2. Il est clair que $I_{u,x}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, qui est principal. D'où le générateur qui est unique si on le suppose unitaire.
3. Pour tout x , $\pi_u(x) = 0$, car $\pi_u(u) = 0$ par définition du polynôme minimal. Ceci montre que $\pi_{u,x}$ divise π_u .
Comme π_u a un nombre fini de diviseurs, on n'a qu'un nombre fini de générateurs possibles que l'on note $p_1 = \pi_{u,x_1}, \dots, p_r = \pi_{u,x_r}$.
Par définition

$$E = \bigcup_{i=1}^r \ker p_i(u)$$

mais l'union de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel ssi l'un des sous-espaces vectoriels contient tous les autres.

Et donc il existe i_0 et $\ker \pi_{u,x_{i_0}} = E$. Ceci montre que $\pi_{u,x_{i_0}}$ annule u est unitaire et est divisible par π_u : on a égalité $\pi_u = \pi_{u,x_{i_0}}$.

4. Si le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique alors il existe $x \in E$, tel que $\pi_u = \chi_u = \pi_{u,x}$. Ceci montre que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre (sinon contredit que $\pi_{u,x}$ est de plus petit degré). Par définition, u est cyclique.
Réciproquement : $(Id, u, \dots, u^{n-1})$ est libre puisqu'il existe $x \in E$ tel que $(x, \dots, u^{n-1}(x))$ libre. Ce qui montre $\dim \mathbb{K}[A] \geq n$, mais c'est aussi le degré du polynôme minimal!

5. Se restreindre aux sous-espaces caractéristiques, et montrer qu'un endomorphisme n nilpotent est cyclique ssi $\dim \ker n = 1$.
6. On sait que la dimension de $C(A)$ vaut au moins n , donc $\dim \mathbb{K}[A] \geq n$, mais la dimension de $\mathbb{K}[A]$ vaut le degré du polynôme minimal.

Solution 30.

1. On a $M \sim 1.M$, donc $1 \in G_M$. Et si $M \sim \lambda M \sim \mu M$, alors $M \sim \lambda\mu^{-1}$. Donc G_M a une structure de sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. On sait que $\text{Spec } M = \{a_1, \dots, a_n\}$, alors $\text{Spec } \lambda M = \{\lambda a_1, \dots, \lambda a_n\}$. Si de plus, les deux matrices sont semblables, alors leur spectre sont égaux. On en déduit que la multiplication par λ induit une permutation σ_λ sur le spectre de M . L'application qui à $\lambda \mapsto \sigma_\lambda$ est une morphisme injectif de groupes.
3. Pour la première matrice : $\pi_M = X^2 - X + 2$, donc a deux racines complexes non réelles, non nulles et conjuguées z et $\bar{z}$. Si $\lambda \in G_M$, alors $\lambda z \in \{z, \bar{z}\}$. Si $\lambda z = z$, alors $\lambda = 1 \in G_M$. Sinon, $\lambda z = \bar{z}$ et on doit alors avoir $\lambda \bar{z} = z$; donc λ est réel, mais c'est absurde. On en déduit que $G_M = 1$.
Pour la seconde, le spectre vaut i et $-i$ et on vérifie que $G_M = \{-1, 1\}$.
Pour la troisième, on a $M^3 = 1$, et $\text{Sp } M = \{1, j, j^2\}$. On vérifie que $G_M = \{1, j, j^2\}$.
4. On sait que toute matrice d'indice de nilpotence maximale est semblable à une matrice compagnon avec des 0 sur la diagonale. Comme pour $\lambda \neq 0$, λM est encore nilpotente, d'indice de nilpotence maximale, on en déduit que $G_M = \mathbb{C}^*$.

Solution 31.

1. On a montré en cours que pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, en posant $F = S_u(x)$, on a $\mu_{u_F}(X) = \chi_{u_F}(X) = P(X)$, pour P un polynôme de degré $\dim(F)$.
Ainsi, si $E = S_u(x)$ pour un certain $x \in E$, on a $\mu_u = \mu_{u_E} = \chi_{u_E} = \chi_u$. Le polynôme minimal de u est de degré n .
2. Dans ce cas, on a $\chi_u(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ et $\mu_u(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ est scindé à racines simples, donc diagonalisable.
On a donc $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ et tous les sous-espaces propres de u sont donc de dimension 1.
Soient $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs propres de u pour les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors, d'après le cours, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .
On pose $x = e_1 + \dots + e_n$. Montrons qu'on a $S_u(x) = E$.
Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre (et donc une base de E).
Trouver des coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x) = 0$ est équivalent à trouver un polynôme $P(X) = a_0 + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$ de degré au plus $n-1$ tel que $P(u)(x) = 0$.
Comme les vecteurs e_i sont des vecteurs propres de u , on a :

$$P(u)(x) = P(u)(e_1 + \dots + e_n) = P(u)(e_1) + \dots + P(u)(e_n) = P(\lambda_1)e_1 + \dots + P(\lambda_n)e_n.$$

Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , on a $P(u)(x) = 0$ si et seulement si $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Or, on a $P(\lambda_i) = 0$ pour tout i si et seulement si $(X - \lambda_i) \mid P$ pour tout i , si et seulement si $\mu_u = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n) \mid P$.

Comme on cherche P avec $\deg(P) \leq n-1 < \deg(\mu_u)$, le seul polynôme P possible est $P(X) = 0$.
Donc, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Autre méthode : On a $u(x) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Ainsi, pour tout $k \geq 0$, on a $u^k(x) = \lambda_1^k e_1 + \dots + \lambda_n^k e_n$. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Posons $y = a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$.

Les coordonnées du vecteur y dans la base B sont ainsi :

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_1^i, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_n^i \right)$$

On reconnaît les coefficients d'une matrice de Vandermonde :

Posons $M = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice de Vandermonde associée aux nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Alors, pour $X = {}^t(a_0, \dots, a_{n-1})$, on a :

$$MX = {}^t\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_1^i, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_n^i\right).$$

Comme les nombres λ_i sont tous distincts, la matrice de Vandermonde M est inversible.

Donc, on a $y = 0$ si et seulement si $MX = 0$, si et seulement si $X = 0$, si et seulement si $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$.

Cela démontre que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Méthode express : La matrice compagnon $C(\chi_A)$ est semblable à A car toutes deux diagonalisables semblables à $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. La famille $(e_1, \dots, C(P)^{n-1}e_1)$ est une base où e_1 est le vecteur colonne de première coordonnée 1 et 0 sinon. Le vecteur e_1 convient.