

Exercice 5:

Nercia Baptiste S.

L'intégrale $K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est impropre en $+\infty$.

~~L'intégrale K converge si et seulement si les intégrales~~

α On $\forall x \geq 1, -x^2 \leq -x$ $-0,5^2 > -0,5$

donc $\forall x \geq 0, 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ par croissance de la fonction $x \mapsto e^x$

c'est une intégrale de référence.

α On $\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

gr: Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge donc

l'intégrale K aussi. $\otimes$ (voir une 2^{ème} méthode ci-dessous page suivante).

L'intégrale $E = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$ est impropre en $+\infty$

Hyp et $\frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ qui ne change pas de signe

On l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ diverge car $\frac{1}{2} \leq 1$

Donc l'intégrale E diverge aussi

L'intégrale $\Delta = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$ est impropre en 0.

~~$\ln(x) = 0$ at $x=0$~~
 ~~$\int_0^1 \ln(x) dx = [$~~

Et les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x}$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont C^1 sur $]0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \int_x^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt &= \left[\frac{1}{2} \sqrt{t} \ln(t) \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t}}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{t} \ln(t) - \left[\sqrt{t} \right]_x^1 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x} \ln(x) - 4 + 4\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -4 \end{aligned}$$

par croissance comparée

Donc l'intégrale Δ converge

Voir une 2^{ème} méthode à la page suivante.

L'intégrale $G = \int_0^1 e^{-x} \ln(x) dx$ est impropre en 0.

et $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq |e^{-x} \ln(x)| \leq |\ln(x)|$

On l'intégrale $\int_0^1 |\ln(x)| dx$ converge si

les intégrales $\int_1^x |\ln(x)| dx$ et $\int_0^1 |\ln(x)| dx$ convergent

Or l'intégrale $\int_1^x |\ln(x)| dx$ converge

et $\forall x \in]0, 1], \int_x^1 |\ln(t)| dt = \int_x^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_x^1$
 $= -x \ln(x) + x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -1$

donc l'intégrale $\int_0^7 |\ln(t)| dt$ converge et donc l'intégrale

G converge absolument

Autre mth. de: $e^{-x} \ln x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln x$ qui ne change pas de signe au voisinage de 0. Or $\int_0^1 \ln(x) dx$ cv. Donc l'intégrale G cv

$$\text{P} \quad \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{x^{0,1} \ln x}{x^{0,6}} = o\left(\frac{1}{x^{0,6}}\right)$$

Car $x^{0,1} |\ln x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par croissance comparée.

Or $\frac{1}{x^{0,6}}$ ne change pas de signe et $\int_0^1 \frac{1}{x^{0,6}} dx$

d'qp. le critère de Riemann $\rightarrow 0$ car $0,6 < 1$.

Donc $\int_0^7 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ cv.

Q $e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\frac{1}{t^2}$ ne change pas de signe et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ cv d'qp. le critère de Riemann en $+\infty$ car $2 > 1$.

Donc $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ cv aussi.