

Une 1^{ère} méthode:

Nesci à Arthur

3) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ est impropre à $+\infty$

Soit $x \in [1, +\infty[$

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \int_1^x \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \frac{dt}{1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}} \\ &= \int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + o\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) \right) dt \\ &= \int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt - \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t} dt + o\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right) dt \end{aligned}$$

On les fonctions $\begin{cases} u: t \mapsto -\cos t \\ v: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$ sont C^1

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \int_1^x u'v = [uv]_1^x - \int_1^x uv' \\ &= -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos 1}{1} + \int_1^x \frac{+\cos(t)}{2\sqrt{t}t} dt \end{aligned}$$

On $\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ $x \rightarrow +\infty$

d- l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}t} dt$ converge

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ converge

Oui

Hyp

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right) \sim \frac{\sin^2 x}{x}$ $x \rightarrow +\infty$

qui ne change

pas de signe

Démonstration que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ diverge

Soit $x \in [1, +\infty[$

$$\int_1^x \frac{\cos^2(t)}{t} dt + \int_1^x \frac{\sin^2(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{dt}{t} \rightarrow$$

Or l'intégrale $A = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge

Et

$$\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt - \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t} dt = \int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt$$

Les fonctions $\begin{cases} u: t \rightarrow \frac{\sin 2t}{2} \\ v: t \rightarrow \frac{1}{t} \end{cases}$ sont C^1

D'où

$$\int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt = \int_1^x u'v = [uv]_1^x - \int_1^x uv' = \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin 2}{2} + \int_1^x \frac{\sin 2t}{t^2} dt$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t^2} dt$ est absolument convergente
d'où l'intégrale $B = \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ est convergente

D'où les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{t} dt$ sont divergentes car si elles étaient toutes deux convergentes l'intégrale A le serait aussi et si l'une d'elles seulement était divergente l'intégrale B serait divergente.

D'où l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ est divergente

oui

Une 2^{de} méthode:

Merci à Soren.

L'intégrale I est impropre en $+\infty$.
Soit $t \in [1; +\infty[$.

$$\frac{\sin(t)}{\sqrt{t} + \sin(t)} = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}}$$

$$= \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + o\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) \right)_{t \rightarrow +\infty}$$

$$\text{car } \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$= \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} - \frac{\sin(t)^2}{t} + o\left(\frac{\sin(t)^2}{t}\right)_{t \rightarrow +\infty}$$

D'une part,

$$\frac{\sin(t)^2}{t} + o\left(\frac{\sin(t)^2}{t}\right)_{t \rightarrow +\infty} \sim \frac{\sin(t)^2}{t} \quad \text{qui ne change pas de signe.}$$

et, soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{\pi}^n \frac{\sin(t)^2}{t} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)^2}{t} dt.$$

Or,

$$\forall t \in [k\pi; (k+1)\pi], \quad \frac{1}{(k+1)\pi} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k\pi}$$

$$\text{Donc } \forall t \in [k\pi; (k+1)\pi], \quad \frac{\sin(t)^2}{t} \geq \frac{\sin^2(t)}{(k+1)\pi} \geq 0.$$

$$\text{car } \sin(t)^2 \geq 0.$$

~~Donc par croissance~~ Donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)^2}{t} dt \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2(t)}{(k+1)\pi} dt \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{On, } \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)^2}{(k+1)\pi} dt &= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\
 &= \frac{1}{(k+1)\pi} \left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{2} dt - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos(2t)}{2} dt \right) \\
 &= \frac{1}{(k+1)\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left[\frac{\sin(2t)}{4} \right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{(k+1)\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2(k+1)\pi)}{4} + \frac{\sin(2k\pi)}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{2(k+1)}
 \end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2(k+1)}$ diverge.

~~Donc la suite des sommes partielles~~
 ~~$\sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)^2}{(k+1)\pi} dt$ tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$~~

car
 Donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)^2}{t} dt$ diverge.

Donc la suite $\left(\int_{\pi}^n \frac{\sin(t)^2}{t} dt \right)$ diverge.

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t} dt$ diverge.

Donc l'intégrale

$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)^2}{t} + o\left(\frac{\sin(t)^2}{t}\right) \right) dt$ diverge.

Qm

D'autre part, soit $x \in [1; +\infty[$

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt =$$

Les fonctions $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ donc

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \left[\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \right]_1^x + \int_1^x \frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}+1} dt$$

$$= \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} - \cos(1) + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^{3/2}} dt$$

Or $\forall t \in [1; 2]$
 $\left| \frac{\cos(t)}{t^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$ or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$

converge car $\frac{3}{2} > 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{2+t^{3/2}} dt$ converge
Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{2+t^{3/2}} dt$ converge ^{absolument}

De plus,

$$\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$ converge

Donc,

l'intégrale $J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t} + \sin(t)} dt$ diverge