

Colle 05 Intégrales généralises

BARBE Marion

Exercice 1. Soient $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$.

1. Montrer que I_n et J_n sont bien définies. Montrer que (I_n) est constante.
2. Montrer que $I_n - J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et la calculer.

Solution 1.

1. $\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \sim_0 \frac{(2n+1)t}{t} \sim_0 2n+1$ et $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\mathcal{I}_n$ est bien définie.
 $\frac{\sin((2n+1)t)}{t} \sim_0 \frac{(2n+1)t}{t} \sim_0 2n+1$ et $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\mathcal{J}_n$ est bien définie.

$$\mathcal{I}_{n+1} - \mathcal{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(2(n+1)t)\sin(t)}{\sin(t)} dt$$

$$\mathcal{I}_{n+1} - \mathcal{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(2(n+1)t) dt = \left[\frac{2}{2(n+1)} \sin(2(n+1)t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0, \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\mathcal{I}_{n+1} = \mathcal{I}_n = \mathcal{I}_0 = \frac{\pi}{2}$$

2. $\mathcal{I}_n - \mathcal{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt.$

Or $f : t \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin t}{t \sin t} \sim_0 \frac{t}{6}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{-x^2 \cos x - (1 - \cos 2x)/2}{x^2 \sin^2 x}$$

qui vers $\frac{1}{6}$ en 0. Donc f est d'classe $\mathcal{C}^1$.

On fait une intégration par partie dans l'intégrale définissant $\mathcal{I}_{n+1} - \mathcal{I}_n$ en dérivant f et en intégrant $\sin(2n+1)t$:

$$\mathcal{I}_n - \mathcal{J}_n = \left[f(t) \frac{-\cos(2n+1)t}{2n+1} \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} f'(t) \cos(2n+1)t dt$$

La dernière intégrale est bornée indépendamment de n . On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_n - \mathcal{J}_n = 0.$$

Il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{J}_n = \frac{\pi}{2}$

3. $\forall x, y > 0, x < y, \int_x^y \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_x^y + \int_x^y \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ Or $\frac{1 - \cos(t)}{t} \sim_0 \frac{t}{2}$ d'où
 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t} = 0$ De plus, $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \sim_0 \frac{1}{2}$ et $\left| \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2}$, donc
 $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et par intégration par partie :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge.}$$

On pose le changement de variable $u = (2n+1)t$:

$$\mathcal{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{2n+1}} \frac{du}{2n+1} = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du, \text{ donc :}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{J}_n = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2. Soient $\alpha > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$.

1) On suppose que f est intégrable sur $[1, +\infty[$. On pose $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ pour $x \geq 1$. Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$.

2) On suppose que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. On pose $S(x) = \int_1^x f(t)dt$ pour $x \geq 1$. Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{f(x)}{S(x)^\alpha}$ sur $[2, +\infty[$.

Solution 2.

1) On commence par quelques propriétés importantes de R .

Pour tout $x > 0$, $R(x) = \int_1^{+\infty} f(t)dt - \int_1^x f(t)dt$, ce qui permet de montrer que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivée $-f$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0$. De plus, R est strictement positive sur $[1, +\infty[$ et f est également positive, donc $g : x \mapsto \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ est de signe fixe et l'étude de l'intégrabilité équivaut à l'existence d'une limite finie pour $x \mapsto \int_1^x g(t)dt$ lorsque x tend vers $+\infty$. Soit $X > 1$, comme $R' = -f$, on obtient

$$\int_1^X \frac{f(x)}{R(x)^\alpha} dx = \begin{cases} \left[-\frac{R(x)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} \right]_1^X & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [-\ln(R(x))]_1^X & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0$, l'intégrale considérée admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $1 - \alpha > 0$ c'est-à-dire $\alpha < 1$. Finalement $x \mapsto \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

2) La fonction S est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivée f , nulle en 0, strictement positive sur $]1, +\infty[$, ce qui justifie l'existence et la continuité de $g_\alpha : x \mapsto \frac{f(x)}{S(x)^\alpha}$ sur $[2, +\infty[$, et de limite infinie en $+\infty$. Une primitive de g_α sur $[2, +\infty[$ est $\frac{1}{(1-\alpha)S^{\alpha-1}}$ si $\alpha \neq 1$ et $\ln S$ si $\alpha = 1$. Comme dans la première question, on montre que g_α est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x - 1/x) \end{cases}$$

Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\int_{-\infty}^0 g(x)dx + \int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Solution 3.

- Soit $\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x - 1/x \end{cases}$. Pour tout $x > 0$, $\varphi_1'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$. Ainsi φ_1 est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\varphi_1(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. De même $\varphi_2 : x \mapsto x - 1/x$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_-^*$ dans $\mathbb{R}$. De plus, soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $\varphi_1(x) = y$ est équivalente à $x^2 - yx - 1 = 0$ ce qui donne $x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}$ et puisque x doit être positif, on obtient $\varphi_1^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$. Le même calcul donne $\varphi_2^{-1}(y) = \frac{y - \sqrt{y^2 + 4}}{2}$.

- Soit K un segment de $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$\int_K |g(x)| dx = \int_K |f(\varphi_1(x))| dx = \int_{\varphi(K)} |f(u)| (\varphi_1^{-1})'(u) du$$

avec $(\varphi_1^{-1})'(u) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4}} \right)$. Comme pour tout $u > 0$, on a $0 \leq (\varphi_1^{-1})'(u) \leq 1$, on obtient $\int_K |g(x)| dx \leq \int_{\varphi(K)} |f(u)| du \leq \int_{\mathbb{R}} |f(u)| du$. Par définition, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On refait le même calcul sur les segments de $\mathbb{R}_-^*$ avec $(\varphi_2^{-1})'(u) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4}} \right)$ dont les valeurs sont dans $[0, 1]$.

- Le fait d'avoir g intégrable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que les deux $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes φ_1 et φ_2 permet de réaliser le changement de variable dans les intégrales, ce qui donne

$$\int_{-\infty}^0 g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4}} \right) du$$

ainsi que

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4}} \right) du$$

En ajoutant, on obtient l'égalité demandée.

XXX

Exercice 4. Soit f une fonction convexe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
On suppose que f tend vers 0 en $+\infty$.
Étudier en $+\infty$ le comportement de $f'(x)$, $xf'(x)$, $f''(x)$.

Exercice 5. Déterminer la nature de $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} \, dx$.

Solution 4.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\tau_{f,a}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Comme le taux d'accroissement est croissant, on en déduit que $f' \leq 0$. Et $\lim_{+\infty} f' = l \in \mathbb{R}$ car f' est croissante majorée. Si $l < 0$, $f'(x) \leq l$ et donc $f(x) - f(a) \leq l(x - a)$ et f tend vers $-\infty$, ce qui contredit l'hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$.

Donc $l = 0$.

On en déduit que f' est négative et que $\int_0^{+\infty} f'(x) dx$ converge. Donc $\int_x^{2x} -f'$ tend vers 0 avec $-f'$ décroissante. $\int_x^{2x} f'(t) dt \geq x f'(x)$ et donc tend vers 0.

On ne peut rien dire sur f'' .

Si f'' est la fonction triangle de base $[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}]$ et de sommet (n, n) .

On a $\int_2^{+\infty} f''$ existe et $f'(x) = -\int_x^{+\infty} f''$ est un $O(\frac{1}{x^2})$ et f est un $O(\frac{1}{x})$ et donc tend vers 0 en $+\infty$.

Solution 5. On pose :

$$u(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad v'(x) = \cos x \text{ et } u'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}, \quad v(x) = \sin x.$$

Par une intégration par parties sur $[2, X]$ (avec $X > 2$), on obtient :

$$\int_2^X \frac{\cos x}{\ln x} dx = \left[\frac{\sin x}{\ln x} \right]_2^X + \int_2^X \frac{\sin x}{x(\ln x)^2} dx.$$

Étudions le comportement de chaque terme lorsque $X \rightarrow +\infty$:

— $\lim_{X \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin x}{\ln x} \right]_2^X = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\sin X}{\ln X} - \frac{\sin 2}{\ln 2} = -\frac{\sin 2}{\ln 2}$. Donc ce terme converge.

— Pour le second terme :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x(\ln x)^2} dx,$$

on a :

$$\left| \frac{\sin x}{x(\ln x)^2} \right| \leq \frac{1}{x(\ln x)^2} \text{ Et l'intégrale } \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx \text{ converge}$$

C'est un classique, que l'on peut vérifier par le changement de variable $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x} dx$, ce qui donne :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{\ln 2}^{+\infty} < +\infty.$$

Donc l'intégrale avec $\sin x$ **converge absolument**.

Conclusion : l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx$$

converge.

Remarque : l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{\ln x} \right| dx$$

diverge, car $|\cos x| \geq \frac{1}{2}$ sur une infinité d'intervalles de longueur non nulle, et $\frac{1}{\ln x}$ n'est pas intégrable absolument sur $[2, +\infty)$. Ainsi, l'intégrale est **convergente mais non absolument convergente**.