

Corrigé de la colle n° 6.

Exercice 1:

Remerci à Lucas P.

1) On soustrait la première colonne à toutes les autres :

$$\Delta_n(n) = \begin{vmatrix} d_1+n & a-d_1 & a-d_1 & \dots & a-d_1 \\ b+n & d_2-b & a-b & \dots & a-b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b+n & \textcircled{0} & \dots & \dots & a-b \\ b+n & \textcircled{0} & \dots & \dots & \textcircled{0} & d_n-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a-d_1 & \dots & a-d_1 \\ d_2-b & a-b & \dots & a-b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a-b \\ 1 & 0 & \dots & 0 & d_n-b \end{vmatrix} n + \begin{vmatrix} d_1 & a-d_1 & \dots & a-d_1 \\ b & d_2-b & a-b & \dots & a-b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a-b \\ b & 0 & \dots & 0 & d_n-b \end{vmatrix}$$

d'où

Δ_n est une fonction affine.

$$2) \Delta_n(-a) = \begin{vmatrix} d_1-a & 0 & \dots & 0 \\ b+a & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b+a & \dots & \dots & 0 \\ b+a & \dots & b+a & d_n-a \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n(-a) = \prod_{i=1}^n (d_i - a)$$

$$\Delta_n(-b) = \prod_{i=1}^n (d_i - b)$$

Comme Δ_n est affine, $\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2$,

$$\forall n \in \mathbb{R}, \Delta_n(n) = cn + d$$

$$\text{d'où} \begin{cases} \Delta_n(-a) = -ca + d \\ \Delta_n(-b) = -cb + d \end{cases}$$

$$\text{d'où} \begin{cases} \Delta_n(-a) - \Delta_n(-b) = c(b-a) \\ a\Delta_n(-b) - b\Delta_n(-a) = d(a-b) \end{cases}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{R}, \Delta_n(n) = \frac{\Delta_n(-a) - \Delta_n(-b)}{b-a} n + \frac{a\Delta_n(-b) - b\Delta_n(-a)}{a-b}$ car $a \neq b$ par hyp.

2 d'a $\Delta_n(0) = \frac{a \prod_{i=1}^n (d_i - b) - b \prod_{i=1}^n (d_i - a)}{a - b}$

Exercice 2:

1) les polynômes X^2 , $(X+1)^2$, $(X+2)^2$, $(X+3)^2$ sont des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$. or $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$,

donc les 4 polynômes de la famille $(X^2, (X+1)^2, (X+2)^2, (X+3)^2)$ sont nécessairement liés. *oui*

2) Comme la famille $(X^2, (X+1)^2, (X+2)^2, (X+3)^2)$ est liée,

$$\exists (d_1, d_2, d_3, d_4) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} d_1 X^2 + d_2 (X+1)^2 + d_3 (X+2)^2 + d_4 (X+3)^2 = 0 \\ (d_1, d_2, d_3, d_4) \text{ non tous nuls.} \end{cases}$$

On pose $P = d_1 X^2 + d_2 (X+1)^2 + d_3 (X+2)^2 + d_4 (X+3)^2$

alors $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$

et donc comme $D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$

[car une des lignes du déterminant D est combinaison linéaire des autres, et donc] *Bof.*
 $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 0$, d'où les lignes du déterminant sont liées, donc $D = 0$.

~~Supposons par l'absurde que $\exists P \in \mathbb{R}[X], \forall(P) = A$.~~

~~donc $A \int_0^1 P(t) dt = P \int_0^1 A(t) dt = A$~~

~~donc $A \left(\int_0^1 P(t) dt - 1 \right) = P a$ donc $A \frac{\int_0^1 P(t) dt - 1}{a} = P$~~

~~d'où $P \in \text{Vect}(A)$ donc $\forall(P) = A$ or $A \neq 0$ car $\int_0^1 A(t) dt \neq 0$.~~

Exercice 3:

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$P \in \ker(u)$$

$$\Rightarrow u(P) = 0$$

$$\Rightarrow A \int_0^1 P(t) dt = P \int_0^1 A(t) dt$$

$$\alpha \Rightarrow P = \frac{1}{a} A \int_0^1 P(t) dt \quad \checkmark \quad \text{car } a \neq 0 \text{ par hyp} \Rightarrow P \in \text{Vect}(A).$$

Réciproquement, soit $P \in \text{Vect}(A)$

$$\text{donc } \exists \lambda \in \mathbb{R}, P = \lambda A.$$

$$u(\lambda A) = A \int_0^1 \lambda A(t) dt - \lambda A(t) \int_0^1 A(t) dt = 0.$$

$$\text{d'où } \boxed{\ker(u) = \text{Vect}(A)}.$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$u^2(P) = u(A) \int_0^1 P(t) dt - u(P) \int_0^1 A(t) dt$$

$$u^2(P) = -u(P) \int_0^1 A(t) dt \quad \text{car } A \in \ker(u) = \text{Vect}(A).$$

$$\text{d'où } u^2 + au = 0$$

$$\text{donc } \boxed{\text{le polynôme } X^2 + aX \text{ annule } u}.$$

Supposons que $\exists P \in \mathbb{R}[X], u(P) = A$.

$$\text{donc } A \int_0^1 P(t) dt - Pa = A \quad \text{d'où } P = \frac{\int_0^1 P(t) dt - 1}{a} A$$

$$\text{d'où } u(P) = 0 \quad \text{or } A \neq 0 \quad \text{car } \int_0^1 A(t) dt \neq 0$$

donc par l'absurde, $A \notin \text{Im}(u)$ donc $\boxed{u \text{ n'est pas surjective.}}$

oui

Exercice 4:

1) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in E^2$.

$$f(\alpha u + \beta v)_0 = \alpha u_0 + \beta v_0 = \alpha f(u)_0 + \beta f(v)_0 = (\alpha f(u) + \beta f(v))_0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\alpha u + \beta v)_n = \frac{\alpha u_n + \beta v_n + \alpha u_{n-1} + \beta v_{n-1}}{2}$$

$$= \alpha \frac{u_n + u_{n-1}}{2} + \beta \frac{v_n + v_{n-1}}{2}$$

$$= \alpha f(u)_n + \beta f(v)_n \\ = (\alpha f(u) + \beta f(v))_n$$

Ainsi: $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

donc f est linéaire

2) Soit $u \in \text{Ker}(f)$. donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u)_n = 0_E$.

donc $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(u)_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2} = 0$

Réduire par récurrence ~~directe~~, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. donc $u = 0_E$.

d'où Ker(f) = {0} donc f est injective.

Soit $v \in E$. Montrons que $\exists u \in E$, $f(u) = v$.

~~Analyse: soit $u \in E$ telle que $f(u) = v$.~~

~~donc $v_0 = u_0$ et~~

On pose $u_0 = v_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2(-1)^n \sum_{k=1}^n (-1)^k v_k$

ainsi: $f(u)_0 = u_0 = v_0$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(u)_n = \frac{2(-1)^n \sum_{k=1}^n (-1)^k v_k + 2(-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k v_k}{2}$

5 donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(u)_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k v_k - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k v_k \right)$

$$= (-1)^n (-1)^n v_n = v_n$$

d'où $f(u) = v$.

donc f est surjective. oui

3) Analyse: Soit $d \in \mathbb{R}$ et soit $u \in E$ non nulle.

on suppose que $f(u) = du$.

~~donc $u_0 = du_0$ donc $u_0 = 0$ ou $d = 1$~~

~~si $u_0 = 0$:~~

~~Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose $u_k = 0$.~~

~~donc $u_{k+1} =$~~

u est non nulle. soit donc $n = \min \{k \in \mathbb{N} \mid u_k \neq 0\}$

Si $n = 0$: alors $u_0 \neq 0$

ou $u_0 = du_0$ donc $d = 1$.

Si $n \geq 1$, alors $u_{n-1} = 0$
et alors $du_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$

$$du_n = \frac{u_n}{2}$$

donc $2d u_n = u_n$ ou $u_n \neq 0$ donc $2d = 1$

donc $d = \frac{1}{2}$

mais donc $du_{n+1} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$

donc $\frac{1}{2} u_{n+1} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n$

donc $\frac{1}{2} u_n = 0$ donc $u_n = 0$, c'est une contradiction.

donc $n = 0$ et $d = 1$

oui

Synthèse :

6 Ainsi Réciproquement, si on pose $U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto 1$

$$\text{alors } f(U)_0 = U_0 = 1$$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, f(U)_n = \frac{U_n + U_{n-1}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\text{d'où } f(U) = 1 \times U \text{ - d'où } \exists u \in E \setminus \text{Ker } f(U) = 1 \times U.$$

1 est donc le seul réel λ tel que $f(U) = \lambda U$.

$$\exists u \in E \setminus \text{Ker } f, f(u) = \lambda u$$

qui