

C O L L E N° 0 5

I n t é g r a l e s

Exercice 1. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} (x+2-\sqrt{x^2+4x+1}) dx$?

Exercice 2. Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$.

1. Montrer que le réel $F(x)$ est défini pour tout $x \geq 0$.
2. Quel est le sens de variation de la fonction F sur $[0, +\infty[$?
3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t+1}$ converge et la calculer.
4. À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, calculer $F(0)$.
5. À l'aide du changement de variable $t = xu$, étudier la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Exercice 3 (d'après CCP TSI 2011 Math 1). Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt$$

qu'on ne cherchera pas à calculer.

1. Montrer que la fonction f est décroissante.
2. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}.$$

Qu'en déduire ?

3. Soit g la fonction définie pour tout réel x strictement positif par l'intégrale

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt.$$

Montrer que la fonction g est bornée.

4. En déduire que $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand x tend vers 0^+ .
5. Soit x_0 un réel strictement positif.

Montrer que, pour tout $x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2 \cdot e \cdot |x - x_0|}{x_0^2}.$$

Qu'en déduire ?