

CORRIGÉ DE LA COLLE N° 05

Intégrales

15 octobre 2025

Exercice 1. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}) dx$?

Notons $f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}$. L'intégrale $\int_0^\infty f$ est impropre en $+\infty$. On cherche un équivalent de f en $+\infty$:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 1} = x \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = x \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{4}{x} \right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = x + 2 - \frac{3}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

d'où $f(x) = \frac{3}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{3}{2} \frac{1}{x}$, qui ne change pas de signe. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ converge (d'après le critère de Riemann en $+\infty$), ce qui montre que $\int_0^{+\infty} f$ diverge.

Exercice 2. Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + x^3 + t^3}$.

1. Montrer que le réel $F(x)$ est défini pour tout $x \geq 0$.
2. Quel est le sens de variation de la fonction F sur $[0, +\infty[$?
3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - t + 1}$ converge et la calculer.
4. À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, calculer $F(0)$.
5. À l'aide du changement de variable $t = xu$, étudier la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

1. Pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[, 1 + x^3 + t^3$ est différent de 0 car supérieur à 1. L'intégrale $F(x)$ est donc impropre en $+\infty$. Or $\frac{1}{1+x^3+t^3} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ qui ne change pas de signe. Et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$. Donc l'intégrale $F(x)$ converge, autrement dit : le réel $F(x)$ est défini.
2. Soit $x \geq y \geq 0$. Alors, pour tout $t \geq 0$, $1 + x^3 + t^3 \geq 1 + y^3 + t^3 > 0$, d'où $\frac{1}{1+x^3+t^3} \leq \frac{1}{1+y^3+t^3}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$. Donc $F(x) \leq F(y)$ par croissance de l'intégrale. La fonction F est donc décroissante.
3. Pour tout $t \geq 0$, $t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} (1 + u^2)$ en posant $u = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right)$. Ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone et $du = \frac{2}{\sqrt{3}} dt$, d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 - t + 1} dt = \frac{4}{3} \int_{-1/\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} \frac{\sqrt{3}}{2} du = \frac{2}{\sqrt{3}} [\text{Arctan}(u)]_{-1/\sqrt{3}}^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{6} \right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

4. Le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, d'où

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^3} dt = - \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1 + u^3} \frac{-du}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1 + u^3} du.$$

Au dénominateur, $1 + u^3 = (1 + u)(1 - u + u^2)$ et, au numérateur, $u = 1 + u - 1$, d'où $\frac{u}{1 + u^3} = \frac{1}{1 - u + u^2} - \frac{1}{1 + u^3}$. D'où $F(0) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - F(0)$ d'après la question précédente. Donc $F(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

5. Soit x strictement positif : le changement de variable $t = xu$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, d'où

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{xdu}{1+x^3+x^3u^3} = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\frac{1}{x^3}+1+u^3} \leq \frac{1}{x^2} F(0).$$

D'où $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x^2} F(0)$. Donc $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, d'après le théorème des gendarmes.

Exercice 3 (d'après CCP TSI 2011 Math 1). Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt$$

qu'on ne cherchera pas à calculer.

1. Montrer que la fonction f est décroissante.
2. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}.$$

Qu'en déduire ?

3. Soit g la fonction définie pour tout réel x strictement positif par l'intégrale

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt.$$

Montrer que la fonction g est bornée.

4. En déduire que $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand x tend vers 0^+ .
5. Soit x_0 un réel strictement positif.

Montrer que, pour tout $x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2 \cdot e \cdot |x - x_0|}{x_0^2}.$$

Qu'en déduire ?

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par l'intégrale $f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt$.

1. Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_2 \geq x_1 > 0$. Alors $\frac{e^t}{x_2+t} \leq \frac{e^t}{x_1+t}$ pour tout $t \in [0, 1]$, d'où (par croissance de l'intégrale) $f(x_2) \leq f(x_1)$. Donc f est décroissante.

2. Pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{e^t}{x+1} \leq \frac{e^t}{x+t} \leq \frac{e^t}{x}$, d'où $\int_0^1 \frac{e^t}{x+1} dt \leq f(x) \leq \int_0^1 \frac{e^t}{x} dt$, donc

$\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$. On divise chaque membre de l'inégalité précédente par $\frac{e-1}{x}$ qui est strictement positif : $\frac{x}{x+1} \leq \frac{f(x)}{\frac{e-1}{x}} \leq 1$, d'où $\frac{f(x)}{\frac{e-1}{x}}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, d'après le théorème des gendarmes. Donc $f(x) \sim \frac{e-1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Soit $t \in [0, 1]$: la fonction $\exp$ est continue sur $[0, t]$ et dérivable sur $]0, t[$, d'où, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, t[$ tel que $e^t - e^0 = e^c \cdot (t - 0)$. D'où $e^c \leq e$ car $t \in [0, 1]$ et $\exp$ est croissante, donc $e^t - 1 \leq e \times t$ pour tout $t \in [0, 1]$. $g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt$. D'une part, $g(x) \geq 0$ car l'intégrande est positif sur $[0, 1]$; d'autre part, $g(x) \leq \int_0^1 e dt \leq e$ car $\forall t \in [0, 1]$, $\frac{e^t - 1}{x+t} \leq \frac{e \times t}{x+t} \leq e \times \frac{t}{x+t} \leq 1$ car $x > 0$. Donc la fonction g est bornée.

4. $g(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt - \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = f(x) - \ln(1+x) + \ln(x)$, d'où $f(x) = g(x) + \ln(1+x) - \ln(x)$, donc $\frac{f(x)}{\ln(x)} = \frac{g(x)}{\ln(x)} + \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} - 1$ tend vers -1 car $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ et g est bornée et $\ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Donc $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand x tend vers 0^+ .

5. Soit $x_0 > 0$ et $x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[: f(x) - f(x_0) = \int_0^1 e^t \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x_0+t} \right) dt = (x_0 - x) \int_0^1 \frac{e^t}{(x+t)(x_0+t)} dt$. Or, pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{e^t}{(x+t)(x_0+t)} \leq \frac{e}{xx_0} \leq \frac{2e}{x_0x_0}$, donc $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2 \cdot e \cdot |x - x_0|}{x_0^2}$.

Quand x tend vers x_0 , $\frac{2 \cdot e \cdot |x - x_0|}{x_0^2}$ tend vers zéro, et d'après l'inégalité de la question précédente et le théorème des gendarmes, $|f(x) - f(x_0)|$ aussi, d'où $f(x)$ tend $f(x_0)$. Donc la fonction f est continue en x_0 . Ceci est vrai pour tout $x_0 > 0$. Donc f est continue sur $]0, +\infty[$.