Les exercices 11, 12 et 13 du TD sont hors du programme de cette colle.

Programme de la colle n° 6

Semaine du 03/11/2025

- **Intégrales généralisées** ▷ **Chapitre III & TD n° 3** : comme avant les vacances.

- **Réduction** ▷ **Chapitre IV & TD n° 4** :

— vecteurs propres, sous-espaces propres, valeurs propres et spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ;

— un endomorphisme u est injectif *ssi* $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$;

— les racines du polynôme caractéristique χ_A sont les valeurs propres de la matrice carrée A et

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ 1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda \ ;$$

— si χ_A est scindé, alors $\operatorname{tr} A = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda \cdot \lambda$ et $\det A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda}$;

— déterminer le spectre et les sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ;

— les *SEP* sont en somme directe ;

— une matrice carrée A est diagonalisable ssi la somme des dimensions de ses *sep* égale la taille de la matrice, ~~ssi χ_A est scindé et la dimension de chaque *sep* égale la multiplicité de la valeur propre, ssi ses *SEP* sont supplémentaires~~ ;

— une matrice carrée de taille n est diagonalisable si elle possède n valeurs propres distinctes deux à deux ;

— une matrice carrée est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé ;

— trigonaliser une matrice carrée sous une forme donnée ;

— utiliser la diagonalisation ou la trigonalisation pour découpler et résoudre un système linéaire de suites défines par récurrence ou un système linéaire d'équations différentielles, à coefficients constants et sans second membre ;

— le polynôme caractéristique d'une matrice est annulateur de cette matrice (théorème de Cayley & Hamilton) et est donc divisible par le polynôme minimal ;

— si P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme u, alors $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), P(\lambda) = 0$ (autrement dit, le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P) ;

— le spectre de u est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal μ_u, qui a les mêmes racines que le polynôme caractéristique χ_u ;

— ~~une matrice est trigonalisable ssi elle possède un polynôme annulateur scindé~~ ;

— ~~une matrice est diagonalisable ssi elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples~~ ;

— si deux endomorphismes commutent, alors les *SEP* de l'un sont stables par l'autre ;

— le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par u sur un *sev* stable divise le polynôme caractéristique de u ;

— ~~si un endomorphisme u est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par u sur un *sev* stable aussi~~ ;

— ~~si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u est scindé, alors on peut définir ses sous-espaces caractéristiques et, d'après le lemme des noyaux, ces sous-espaces caractéristiques sont supplémentaires. Stabilité par u des *SEC* et dimension des *SEC*~~.