Corrigé du D.S. n° 3 de mathématiques

Exercice 1 (tiré de BCE 2024)

1. L'intégrale I_n, impropre en 0, est convergente car elle est faussement impropre. En effet, la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto (1-t)^n$ est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = -n(1-t)^{n-1}$. En particulier $g'(0) = -n$. D'où $f_n(t) = -\frac{(1-t)^n - 1}{t} = -\frac{g(t)-g(0)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} n$.

2. D'après la formule du binôme, $1-(1-t)^n = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-t)^k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'où $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} t^{k-1}$ pour tout $t \in]0,1]$ Donc, en intégrant : $\boxed{I_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.}$

3. $\sin(2px) = \frac{e^{i2px} - e^{-i2px}}{2i}$, d'où $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(2px) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} e^{i2px} - \text{c.c.}\right)$. Or $e^{i2px} = \left(e^{i2x}\right)^p$ et, d'après la formule du binôme, $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} e^{i2px} = \left(1+e^{i2x}\right)^n = e^{inx}\left(e^{-ix}+e^{ix}\right)^n = e^{inx}2^n(\cos x)^n$. D'où $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(2px) = \frac{e^{inx}2^n(\cos x)^n - \text{c.c.}}{2i}$. Donc $\boxed{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(2px) = 2^n \sin(nx)(\cos x)^n.}$

4. Soit $t \in]0,1]$. En reconnaissant une somme géométrique de raison $(1-t) \neq 1$, $f_n(t) = \frac{1-(1-t)^n}{1-(1-t)} = \sum_{p=0}^{n-1}(1-t)^p = \sum_{k=1}^{n}(1-t)^{k-1}$. Donc, en intégrant : $\boxed{I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$

5. D'après la question 3, $u_n = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \int_0^{\pi/2} x \sin(2px)\, dx$. Si $p = 0$, alors l'intégrale est nulle et, pour chaque $p \in [\![1,n]\!]$, elle vaut $\frac{\pi}{4p}(-1)^{p-1}$. Donc $\boxed{u_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} I_n.}$

6. D'après la question 4, $I_k \leq k$, d'où $0 \leq u_k \leq \frac{\pi}{4}\frac{k}{2^k}$. Or $\frac{k}{2^k} = \frac{k}{\sqrt{2}^k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}^k} = o\left(\frac{1}{\sqrt{2}^k}\right)$ car $\frac{k}{\sqrt{2}^k}$ tend vers 0 par croissances comparées parce que $\sqrt{2} > 1$. Or $\frac{1}{\sqrt{2}^k}$ ne change pas de signe et la série $\sum \frac{1}{\sqrt{2}^k}$ converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}} \in]-1,+1[$. Donc $\boxed{\text{la série } \sum u_k \text{ converge.}}$

7. Pour tout $t \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$, d'où $\displaystyle\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k + \frac{t^n}{1-t}$. En intégrant de 0 à $x \in [0,1[$, $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + R_n(x)$, où $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

8. Soit $x \in [0,1[$. Pour tout $t \in [0,x]$, $0 \leq \frac{t^k}{1-t} \leq \frac{x^k}{1-t}$, d'où $0 \leq R_k(x) \leq \displaystyle\int_0^x \frac{x^k}{1-t}\,dt \leq x^k \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt \leq -x^k \ln(1-x)$. Or $x^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $R_k(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par le théorème des gendarmes.

9. Pour tout $x \in [0,1[$, $(1-x)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} I_k x^k = \sum_{k=1}^{n} I_k x^k - \sum_{k=1}^{n} I_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} I_k x^k - \sum_{k=2}^{n+1} I_{k-1} x^k = x + \sum_{k=2}^{n}(I_k - I_{k-1})x^k - I_n x^{n+1}$, d'où $(1-x)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} I_k x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - I_n x^{n+1}$. D'après la question 7, $(1-x)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} I_k x^k = -\ln(1-x) - R_n(x) - I_n x^{n+1}$.

Cette égalité passe à la limite $n \to \infty$ car : d'une part $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la question 8, d'autre part $I_n x^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées (de même qu'à la question 6).

D'où $\boxed{\text{la série } \sum I_k x^k \text{ converge et } (1-x)\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} I_k x^k = -\ln(1-x) \text{ pour tout } x \in [0,1[.}$

10. En particulier, si $x = \frac{1}{2}$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} I_k \frac{1}{2^k} = 2\ln 2$. Donc, d'après la question 5, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \frac{\pi}{2}\ln 2.}$

Exercice 2 (tiré de EPITA 2017 PSI)

1. L'intégrale $I(\alpha)$ est impropre en 0 et $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, d'où $\frac{\sin t}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ qui ne change pas de signe sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Or l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ converge si, et seulement si, $\alpha - 1 < 1$ d'après le critère de Riemann en 0, donc $\boxed{\text{l'intégrale } I(\alpha) \text{ converge si, et seulement si, } \alpha < 2.}$

2. $1 - \cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$, d'où $\frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{t^{\alpha-1}}$ et (comme à la question précédente)

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \text{ converge si, et seulement si, } \alpha < 2.}$$

3. Soit $\alpha \in [-1,1]$:

- La fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est positive sur $]0,\pi/2]$ donc $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt \geq 0$.
- $\alpha + 1 \leq 2$ donc, pour tout $t \in]0,1]$, $\frac{1}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{t^2}$ et, en multipliant par $1-\cos t$ qui est positif, $\frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1-\cos t}{t^2}$. Donc $\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ par croissance de l'intégrale.
- $\alpha + 1 \geq 0$ donc, pour tout $t \in [1,\pi/2]$, $\frac{1}{t^{\alpha+1}} \leq 1$. D'où $\int_1^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt \leqslant \int_1^{\pi/2} (1-\cos t)\,dt$.

La relation de Chasles permet de conclure : $\boxed{0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt + \int_1^{\pi/2} (1-\cos(t))\,dt.}$

4. Soit $\alpha \in [-1, 1]$. On pose $u(t) = 1 - \cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$. De $2 - \alpha > 0$, on tire que $u(t)v(t) = \frac{1-\cos t}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{t^{2-\alpha}}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc on peut intégrer par parties :

$$I(\alpha) = \left[\frac{1-\cos t}{t^\alpha}\right]_0^{\pi/2} + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt = \frac{1-0}{(\pi/2)^\alpha} - 0 + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

Donc $I(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$. Et, en notant M le majorant (indépendant de α) de la question précédente :

$$\forall \alpha \in]0, 1], \quad \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha \leq I(\alpha) \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha + \alpha M.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\boxed{\lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = 1}$ car $\left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(2/\pi)} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$ et $\alpha M \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$.

5. Soit $\alpha > 0$. Pour tout $t \geq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \left|\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ et l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,dt$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$, donc l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$ est absolument convergente.

On procède à une intégration par parties en posant $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$. Pour tout $t \geq \frac{\pi}{2}$, $|u(t)v(t)| = \left|\frac{\cos t}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$ converge. Le théorème d'intégration par parties assure alors

$$\boxed{\text{la convergence de l'intégrale } J(\alpha) = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt \text{ si } \alpha > 0.}$$

6. Pour tout $x \geq \frac{\pi}{2}$, $\int_{\pi/2}^{x} \sin(t)\,dt = [-\cos t]_{\pi/2}^{x} = -\cos x$ qui n'a pas de limite lorsque $x \to +\infty$. Donc

$$\boxed{\text{l'intégrale } J(0) \text{ est divergente.}}$$

7. On pose $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2, +\infty[$ avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$. Comme la fonction u est bornée et $v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui rend légitime une première intégration par parties :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = 0 - 0 - \alpha \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt = -\alpha \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

On pose à nouveau $x(t) = \sin t$ et $y(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}}$. Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2, +\infty[$ avec $x'(t) = \cos t$ et $y'(t) = -\frac{\alpha+1}{t^{\alpha+2}}$. Comme la fonction x est bornée et $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $x(t)y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui légitime une seconde intégration par parties :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt = -\alpha \left(0 - \frac{1}{(\pi/2)^{\alpha+1}} + (\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, dt\right)$$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, dt.}$

8. L'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale donnent :

$$\left|\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, dt\right| \leq \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\alpha+2}},\, dt \leq \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+2}}$$

et le dernier membre est égal à $\alpha(\alpha+1)\left[-\frac{1}{(\alpha+1)t^{\alpha+1}}\right]_{\pi/2}^{+\infty} = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}}$ Comme $\frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$, on conclut, par le théorème des gendarmes, que $\alpha(\alpha+1)\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, dt \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Or $\frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc, d'après la question précédente, $\boxed{J(\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0.}$

9. L'intégrale $f(\alpha)$ converge si, et seulement si, les intégrales $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent. Or l'intégrale $I(\alpha)$ converge si, et seulement si, $\alpha < 2$ d'après la question 1. Et l'intégrale $J(\alpha)$ converge si $\alpha > 0$ d'après la question 5. Donc, $\boxed{\text{l'intégrale } f(\alpha) \text{ converge si } \alpha \in]0,2[.}$ De plus, $\forall \alpha \in]0,2[,\ f(\alpha) = I(\alpha) + J(\alpha)$.

D'où $\boxed{f(\alpha) \underset{\alpha\to 0^+}{\longrightarrow} 1}$ d'après les questions 4 et 8.

10. La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^2} \sim \frac{1}{2}$. Donc elle est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(0) = \frac{1}{2}$.

Étant continu sur le segment $[0,\pi]$, ce prolongement est borné et atteint ses bornes, donc il atteint sur $[0,\pi]$ un minimum μ qui est strictement positif car la fonction φ est strictement positive. En effet, $\cos t < 1$ pour tout $t \in]0,\pi]$ et $\varphi(0) = \frac{1}{2} > 0$.

11. Après intégration par parties,

$$f(\alpha) = \alpha\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt \geq \alpha\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt$$

car la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}$ est positive sur $]0,+\infty[$.

12. $\alpha\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt = \alpha\int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha-1}}\, dt \geqslant \alpha\mu\left[\frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_0^{\pi} = \alpha\mu\frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$.

Donc $f(\alpha) \geqslant \alpha\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt \geqslant \alpha\mu\frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$.

Or $\alpha\mu\frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha} = \alpha\mu\frac{e^{(2-\alpha)\ln\pi}}{2-\alpha} \underset{\alpha\to 2^-}{\sim} \frac{2\mu}{2-\alpha} \underset{\alpha\to 2^-}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\boxed{f(\alpha) \underset{\alpha\to 2^-}{\longrightarrow} +\infty.}$

Exercice 3

1. **(a)** Si $x \geq 1$, alors les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant et $\dfrac{\ln t}{1+t^2} \geq 0$ pour tout $t \in [1, x]$, d'où $f(x) \geq 0$.

Si $x \leq 1$, alors les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre décroissant et $\dfrac{\ln t}{1+t^2} \leq 0$ pour tout $t \in [x, 1]$, d'où $f(x) \geq 0$.

Donc $\boxed{f(x) \geq 0 \text{ pour tout réel } x > 0.}$

(b) On effectue le changement de variable $u(t) = \dfrac{1}{t}$. La fonction $u : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, d'où :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u^2}} \frac{-du}{u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln u}{1+u^2}\, du = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc $\boxed{f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout réel } x > 0.}$

2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$ est impropre en $+\infty$. Or $\dfrac{\ln t}{1+t^2} = \dfrac{1}{t^{3/2}} \cdot \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}+\frac{1}{t^{3/2}}} = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ car $\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}+\frac{1}{t^{3/2}}} \sim \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\, dt$ est convergente d'après le critère de Riemann en $+\infty$. On en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt \text{ est aussi convergente.}}$

Et on note I sa valeur.
Passons à la limite $x \to 0^+$ dans l'égalité $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$: par composition de limite, on sait que $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers I. On en déduit que $f(x)$ tend aussi vers I.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale impropre } \displaystyle\int_1^{0} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt \text{ est convergente et vaut aussi } I.}$

3. **(a)** Soit $x > 0$. On effectue une intégration par partie en posant $u(t) = \ln t$ et $v(t) = \text{Arctan}(t)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, d'où :

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt = \int_1^x uv' = [uv]_1^x - \int_1^x u'v = [\text{Arctan}(t)\ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\text{Arctan}(t)\, dt.$$

Donc

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \text{Arctan}(x) \cdot \ln(x) - g(x).$$

D'une part, $\text{Arctan}(x) \cdot \ln(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ car $\text{Arctan}(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ et $x\ln(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

D'autre part, $f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} I$. Donc $\boxed{g(x) \text{ tend vers } -I \text{ quand } x \text{ tend vers } 0.}$

(b) On sait que, pour tout $x > 0$, $g(x) = \text{Arctan}(x) \cdot \ln(x) - f(x)$. D'une part, $\text{Arctan}(x) \cdot \ln(x) \sim \frac{\pi}{2} \cdot \ln(x)$ car $\text{Arctan}(x)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers $+\infty$. D'autre part, $f(x)$ tend vers le réel I tandis que $\text{Arctan}(x) \cdot \ln(x)$ tend vers $-\infty$, d'où

$$g(x) = \text{Arctan}(x) \cdot \ln(x) + o\left(\text{Arctan}(x) \cdot \ln(x)\right) \sim \text{Arctan}(x) \cdot \ln(x).$$

Donc $\boxed{g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \cdot \ln(x).}$

4. (a) $1 + u + u^2 + \cdots + u^n = \dfrac{1 - u^{n+1}}{1 - u} = \dfrac{1}{1-u} - \dfrac{u^{n+1}}{1-u}$ pour tout $u \neq 1$, d'où, en posant $u = -t^2$:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

pour tout réel t. Multiplions par $\ln(t)$ et intégrons de 1 à un réel $x > 0$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k F_{2k}(x) \; + \; (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} \, dt}$$

(b) Soit $x \in]0, 1]$. Passons aux valeurs absolues :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k F_{2k}(x) \right| = \left| \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} \, dt \right| = \int_x^1 \frac{t^{2n+2}(-\ln(t))}{1+t^2} \, dt$$

car $\ln t \leq 0$ pour tout $t \in [x, 1] \subset]0, 1]$. Or $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, d'où

$$\int_x^1 \frac{t^{2n+2}(-\ln(t))}{1+t^2} \, dt \leq \int_x^1 t^{2n+2}(-\ln(t)) \, dt = F_{2n+2}(x).$$

Donc $\boxed{\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k F_{2k}(x) \right| \leq F_{2n+2}(x)}$

(c) On intègre par partie en posant $u(t) = \frac{t^k}{k+1}$ et $v(t) = \ln t$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$, d'où :

$$F_k(x) = \int_1^x u'v = [uv]_1^x - \int_1^x uv' = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{k+1}}{k+1} \frac{1}{t} \, dt = \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x - \frac{x^{k+1} - 1}{(k+1)^2}.$$

On passe à la limite $x \to 0^+$ dans cette égalité : $\boxed{\lim_{x \to 0^+} F_k(x) = \frac{1}{(k+1)^2}}$ par croissances comparées. L'inégalité large de la question (4b) passe à la limite $x \to 0^+$: $\boxed{\left| I - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}.}$

Grâce au théorème des gendarmes, on conclut que la série $\sum(-1)^k \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge et que

$$\boxed{I = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)^2}.}$$

Exercice 4 (tiré de Centrale 2011 TSI)

1. Pour tout $x > 0$, $f(x+1)-g(x+1) = (\frac{1}{x} - f(x)) - (\frac{1}{x} - g(x)) = -(f(x)-g(x))$, d'où $f(x+2)-g(x+2) = -(f(x+1)-g(x+1)) = f(x)-g(x)$, donc $\boxed{f-g \text{ est 2-périodique.}}$

De plus, les fonctions f et g tendent vers 0, donc $\lim\limits_{+\infty}(f-g) = 0$. Soit alors $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. La fonction $h = f-g$ est 2-périodique, d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(x) = h(x+2n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $h(x) = 0$ et, le choix de x étant arbitraire dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, i.e. $f = g$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $\boxed{\text{la solution de } (S) \text{ est unique, si elle existe.}}$

2. L'intégrale $F(x)$ est impropre en $+\infty$. Or $\frac{1}{t^x(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{1+x}}$ qui ne change pas de signe. Et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}}\,dt$ converge si, et seulement si, $1+x > 1$. L'intégrale $F(x)$ est de même nature et converge donc si, et seulement si, $x > 0$.

3. Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$. D'où, pour tout $x \geq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t(t+1)}\,dt = [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^x = \ln(x) - \ln(x+1) + \ln 2$. Or $\ln(x)-\ln(x+1) = -\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$. D'où $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t(t+1}\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

Donc $\boxed{F(1) = \ln 2.}$

Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, avec $du = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$, d'où :

$\forall x \geq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\,dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{du}{1+u^2} = 2\mathrm{Arctan}(x) - 2\frac{\pi}{4} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4}$. Donc $\boxed{F(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}.}$

4. Soient $x_1 \geq x_2 > 0$. Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{t^{x_1}(1+t)} \leq \frac{1}{t^{x_2}(1+t)}$. En effet, $\ln t \geq 0$ car $t \geq 1$. D'où $-x_1 \ln t \leq -x_2 \ln t$ et $t^{-x_1} \leq t^{-x_2}$ par croissance de l'exponentielle. D'où $F(x_1) \leq F(x_2)$ par croissance de l'intégrale. Donc la fonction F est décroissante.

5. Pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times[1,+\infty[$, $\frac{1}{t^x(1+t)} - \frac{1}{t^{x+1}(1+t)} = \frac{1}{1+t}\cdot\left(\frac{1}{t^x} + \frac{1}{t^{x+1}}\right) = \frac{1}{t^{x+1}}$, d'où

$F(x) + F(x+1) = \int_1^{+\infty} t^{-1-x}\,dt = \left[\frac{t^{-1-x+1}}{-1-x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}$.

6. Trois méthodes :

- La fonction F est positive et $F(x)+F(x+1) = \frac{1}{x}$ d'après la question 5, d'où $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$, donc $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des gendarmes.
- La fonction F posséde une limite ℓ (éventuellement infinie) en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone car F est décroissante d'après la question 4. Cela permet de passer à la limite dans l'égalité de la question 5 : $\ell + \ell = 0$, donc $\ell = 0$.

- Soit $x > 1$: pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{t^x(1+t)} \leq \frac{1}{t^x}$, d'où $0 \leq F(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$ par croissance de l'intégrale. On conclut avec le théorème des gendarmes.

7. Pour tout $x > 0$, $x + 1 \geq 1$, d'où (par décroissance de F) : $F(x+1) \leq F(1)$. De plus, $F(x+1) \geq 0$. On en déduit que $0 \leq \frac{1}{x} - F(x) \leq F(1)$. On en tire un encadrement de $F(x)$: $\frac{1}{x} - F(1) \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$. On divise par $\frac{1}{x}$: $1 - xF(1) \leq \frac{F(x)}{1/x} \leq 1$. Quand x tend vers 0^+, les deux « gendarmes » tendent vers 1, donc $\boxed{F(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.}$

8. De la décroissance de la fonction F, on déduit que, pour tout $x > 1$,

$F(x+1) \leq F(x) \leq F(x-1)$, d'où $F(x) + F(x+1) \leq 2F(x) \leq F(x-1) + F(x)$. Or $F(x+1) + F(x) = \frac{1}{x}$ et $F(x-1) + F(x) = \frac{1}{x-1}$. On divise par $\frac{1}{x}$: $1 \leq 2F(x) \leq \frac{x}{x-1}$. Quand x tend vers $+\infty$, les deux « gendarmes » tendent vers 1, donc $\boxed{F(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.}$

9. La suite $\frac{1}{n+x}$ (bien définie car $x > 0$) tend vers 0 en décroissant. Donc, d'après le théorème des séries alternées, $\boxed{\text{la série } \sum \frac{(-1)^n}{n+x} \text{ converge.}}$

10. D'une part, $\forall x > 0,\ G(x) + G(x+1) = \frac{1}{x}$ par un télescope. D'autre part, d'après le théorème des séries alternées (dont les hypothèses ont été vérifiées à la question précédente), la somme $G(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est encadrée par deux sommes partielles consécutives. D'où $\forall x > 0,\ \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \leq G(x) \leq \frac{1}{x}$. Par le théorème des gendarmes, $G(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La fonction G vérifie donc le système (S).

La fonction F aussi d'après les questions 6 et 5. Donc $\boxed{\text{les fonctions } G \text{ et } G \text{ sont égales}}$ d'après la question 1.

11. En particulier, si $x = 1$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = G(1) = F(1) = \ln 2$ d'après la question 3, donc $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2.}$

12. Soit $N \in \mathbb{N}$: $G(N+2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+N+2} \overset{n=k+N+1}{=} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-N-1}}{n+1} = (-1)^{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Donc, $\boxed{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = (-1)^{N+1} G(N+2) \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^{N+1}}{2N}}$ d'après l'équivalent de la question 8.