

D.S. N° 3 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient quatre exercices indépendants.

Dans chaque exercice, on peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

11 EXERCICE 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{\pi/2} x \sin(nx) (\cos x)^n dx$ et, pour tout $t \in]0, 1]$, $f_n(t) = \frac{1 - (1-t)^n}{t}$.

1. Montrer que l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ est convergente.

2. Montrer que $I_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

3. Montrer que $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \sin(2px) = 2^n \sin(nx) (\cos x)^n$. $e^{i2px} + c.c. \dots (1+e^{i2x})^n$

4. Montrer que $I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

5. Montrer que $u_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} I_n$. $u_n = \sum_{p=0}^n \dots$

6. En déduire la nature de la série $\sum u_k$.

7. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + R_n(x)$, où $R_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

8. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que $R_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

9. Soit $x \in [0, 1[$. En étudiant $(1-x) \sum_{k=1}^n I_k x^k$, montrer que la série $\sum I_k x^k$ converge et que

$$(1-x) \sum_{k=1}^n I_k x^k = \sum_{k=2}^n \frac{x^k}{k} - I_n x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} I_k x^k = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

10. En déduire la somme $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

15 EXERCICE 2

- 2 { 1. Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ converge-t-elle? ~ 0,5
on change par designe 0,5
Riemann - 0 0,5
~ 0,5
2. Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$ converge-t-elle? ~ 0,5
- 1,5 3. Montrer que, pour tout $\alpha \in [-1, 1]$,
- $$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt \leq \int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt + \int_1^{\pi/2} (1 - \cos(t)) dt.$$
- 2 4. En déduire que $I(\alpha)$ tend vers 1 lorsque α tend vers 0^+ . IPP 1 (dont 0,5 pour les hyp.)
Grand nombre 1 (dont 0,5 pour l'utilisation de l'eq. 3)
- 2 5. Montrer que l'intégrale $J(\alpha) = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ converge pour tout réel $\alpha > 0$.
- 0,5 6. L'intégrale $J(0)$ converge-t-elle?
- 0,5 7. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, $J(\alpha) = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}} dt$.
- 1,5 8. Étudier la limite de $J(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs supérieures.
- 1 9. Justifier que le réel $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ est bien défini si $\alpha \in]0, 2[$. Étudier la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs supérieures. 0,5
- 2 10. Montrer qu'il existe un réel μ strictement positif tel que : $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \geq \mu$ pour tout $t \in]0, \pi]$.
- 0,5 11. Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 2[$:

$$f(\alpha) \geq \alpha \int_0^\pi \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

- 1,5 12. En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.

10 EXERCICE 3

1. On définit, pour tout réel $x > 0$, la fonction f par $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

0,5 (a) Étudier, pour chaque réel $x > 0$, le signe de $f(x)$.

1 (b) Exprimer, pour tout réel $x > 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $f(x)$.

1,5 2. Montrer que les intégrales généralisées

$$\int_1^0 \frac{\ln t}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

1 sont convergentes et qu'elles ont la même valeur.

On notera I leur valeur commune, qu'on ne demande pas de calculer.

3. Soit, pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$.

1 (a) Exprimer, en fonction du réel I , la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0^+ . IPP 0,5 $\text{Arctan}(x) \sim x$ 0,5

1 (b) Déterminer un équivalent de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x > 0$, $F_k(x) = \int_1^x t^k \cdot \ln(t) dt$.

1 (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k F_{2k}(x) + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} dt.$$

1 (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k F_{2k}(x) \right| \leq F_{2n+2}(x).$$

3 (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $F_k(x)$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_k(x)$. En déduire l'expression de I comme la somme d'une série numérique.

2

18 EXERCICE 4

On s'intéresse aux fonctions $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant le système

$$(S) \quad \begin{cases} \forall x > 0, & y(x+1) + y(x) = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

- 3 1. Montrer que, si f et g sont deux solutions du système (S), alors la fonction $f - g$ est 2-périodique. En déduire que $f = g$.

On note $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

- 1 2 3. Calculer $F(1)$ et $F(\frac{1}{2})$.
 1 4. Montrer que la fonction $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto F(x)$ est décroissante.
 0,5 5. Montrer que $F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
 1,5 6. Montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
 2 7. Montrer que $F(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$ quand x tend vers 0^+ .
 2 8. Montrer que $F(x)$ est équivalent à $\frac{1}{2x}$ quand x tend vers $+\infty$.
 0,5 9. Soit un réel $x > 0$. Montrer que la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge.

On note $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- 2 10. Montrer que $F(x) = G(x)$ pour tout $x > 0$. $G(n+1) + G(n) = \frac{1}{n}$
 0,5 11. En déduire la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. $G(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 2 12. Déterminer un équivalent du reste $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. $q. 1 0,5$