

Colle 06 Réduction

BOLLET Alexandre

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On souhaite étudier si le fait que $f \circ g$ est diagonalisable entraîne que $g \circ f$ est diagonalisable. On fixe $\mathcal{B}$ une base de E et on désigne par A (resp. B) la matrice de f (resp. g) dans cette base.

1. Dans cette question, on suppose f et g inversibles.

- (a) Démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
- (b) Soit λ une valeur propre de $f \circ g$, et soit E_λ (resp. F_λ) l'espace propre de $f \circ g$ (resp. de $g \circ f$) associé à λ . Démontrer les inclusions

$$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \text{ et } f(F_\lambda) \subset E_\lambda.$$

- (c) Que peut-on en déduire sur les dimensions des espaces E_λ et F_λ ?
- (d) Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.

2. Dans cette question, on suppose maintenant f et g quelconques.

- (a) Montrer que si $f \circ g$ a une valeur propre nulle, il en est de même de $g \circ f$.
- (b) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $AB - \alpha I$ est inversible. On note C son inverse. Vérifier que

$$(BA - \alpha I)(BCA - I) = \alpha I.$$

Que peut-on en déduire pour $\det(BA - \alpha I)$?

- (c) Dédurre de ce qui précède que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.
- (d) Donner un exemple simple de matrices A et B tel que AB est diagonalisable, et BA n'est pas diagonalisable.

Solution 1.

1.a On remarque que $AB = A(BA)A^{-1}$ et donc AB et BA sont semblables : AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

1.b Soit $x \in E_\lambda$, c'est-à-dire que $f \circ g(x) = \lambda x$. On a

$$g \circ f(g(x)) = g(f \circ g(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Ceci prouve que $g(x) \in F_\lambda$, et donc que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$. De même, on montre que $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$.

1.c f et g étant des isomorphismes, ils conservent la dimension, et on a donc :

$$\dim(g(E_\lambda)) = \dim(E_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) = \dim(F_\lambda).$$

D'autre part, les inclusions démontrées à la question précédente prouvent que

$$\dim(g(E_\lambda)) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) \leq \dim(E_\lambda).$$

Si on met tout ensemble, on en déduit que

$$\dim(E_\lambda) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(F_\lambda) \leq \dim(E_\lambda).$$

Ainsi, les espaces propres E_λ et F_λ ont même dimension.

1.d Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $f \circ g$. Alors, puisque $f \circ g$ est diagonalisable, on a

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) = n.$$

D'après le résultat de la question précédente, on a aussi

$$\dim(F_{\lambda_1}) + \dots + \dim(F_{\lambda_p}) = n.$$

Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de $g \circ f$ est (au moins) égale à n . C'est bien que $g \circ f$ est diagonalisable.

2.a Si 0 est valeur propre de $f \circ g$, alors $\det(AB) = 0$. Mais $\det(AB) = \det(BA) = 0$, et donc 0 est valeur propre de $g \circ f$.

2.b On utilise la relation suivante :

$$(AB - \alpha I)C = I \implies ABC = I + \alpha C.$$

Développant, on trouve :

$$\begin{aligned} (BA - \alpha I)(BCA - I) &= B(ABC)A - BA - \alpha BCA + \alpha I \\ &= BA + \alpha BCA - BA - \alpha BCA + \alpha I \\ &= \alpha I. \end{aligned}$$

On en déduit que $\det(BA - \alpha I)$ est non-nul, puisque

$$\det(BA - \alpha I) \times \det(BCA - I) = \alpha^n \neq 0,$$

et donc que $BA - \alpha I$ est inversible.

2.c On raisonne par contraposée. Si α n'est pas une valeur propre de $f \circ g$, alors $AB - \alpha I$ est inversible, et par la question précédente, $BA - \alpha I$ est inversible, c'est-à-dire que α n'est pas une valeur propre de $g \circ f$. Par contraposée, toute valeur propre de $g \circ f$ est une valeur propre de $f \circ g$. Par symétrie du rôle joué par f et g , $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

2.d On va travailler en dimension 2, avec des matrices non-inversibles. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BA est diagonalisable, tandis que AB ne l'est pas.

Exercice 2. Soit n un entier naturel non nul.

Soit A une matrice carrée réelle de taille n .

On note I la matrice identité de taille n .

On pose $B = \begin{pmatrix} A & I \\ I & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour toute matrice carrée C de taille n :

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ C & A \end{pmatrix} = \det(A + C) \det(A - C).$$

2. Calculer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A .

3. Préciser le spectre de B en fonction de celui de A

4. Préciser les sous-espaces propres de B en fonction de ceux de A

5. On suppose que A est diagonalisable. B est-elle diagonalisable ?

6. On définit une suite de matrices de la façon suivante :

La matrice A_0 est la matrice nulle de taille 1 : $A_0 = (0)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La matrice A_k étant définie, de taille 2^k , on pose :

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & I_k \\ I_k & A_k \end{pmatrix} \text{ où } I_k \text{ est la matrice identité, de taille } 2^k.$$

Montrer que la matrice A_k est diagonalisable et préciser son spectre.

Solution 2.

1. On calcule

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+C & C \\ A+C & A \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+C & C \\ A+C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+C & C \\ 0 & A-C \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ C & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+C & C \\ 0 & A-C \end{pmatrix} = \det(A+C) \det(A-C)$$

2. $P_B(X) = P_A(X+1)P_A(X-1)$.

3. $Sp(B) = \{\mu-1, \mu+1; \mu \in Sp(A)\}$.

4. Soit $\lambda \in Sp(B) : Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est dans $E_\lambda(B)$ ssi : $\begin{cases} A(X+Y) = (\lambda-1)(X+Y) \\ A(X-Y) = (\lambda+1)(X-Y) \end{cases}$.

On obtient $E_\lambda(B) = \left\{ \begin{pmatrix} U+V \\ U-V \end{pmatrix} ; (U, V) \in E_{\lambda-1}(A) \times E_{\lambda+1}(A) \right\}$.

Avec la convention : $E_\mu(A) = \{0\}$ quand μ n'est pas valeur propre.

5. Si A est diagonalisable :

-> P_B est scindé (question 2).

-> Il reste à vérifier l'égalité de la dimension des sous-espaces propres avec l'ordre de multiplicité :

$$\dim E_\lambda(B) = \dim E_{\lambda-1}(A) + \dim E_{\lambda+1}(A) \text{ (avec l'isomorphisme } (U, V) \rightarrow \begin{pmatrix} U+V \\ U-V \end{pmatrix} \text{)}$$

. On tire l'ordre de multiplicité de la question 2 :

$$\alpha_\lambda(B) = \alpha_{\lambda+1}(A) + \alpha_{\lambda-1}(A).$$

6. Par récurrence : A_k est diagonalisable et $Sp(A_k) = \{k-2i, i=0 \dots k\}$.

GAUFFRIAUX Noé

Exercice 3. Soient $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PM - MP$.

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
2. Calculer la trace de f .

Exercice 4. Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$. On suppose que $MN = 0$ et que $M + M^T$ est inversible.

1. Montrer que M et N ont un vecteur propre commun.
2. Montrer que $N + N^T$ n'est pas inversible.

Solution 3. On étudie l'endomorphisme canoniquement associé $\varphi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n)$, $u \mapsto p \circ u - u \circ p$ où p est le projecteur sur F parallèlement à G avec $\mathbb{R}^n = F \oplus G$. Dans une base adaptée, on se ramène à étudier l'endomorphisme

$$\tilde{f} : M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -C & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{cases} E_0(\tilde{f}) = \text{vect}(E_{i,j}, (i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2 \cup \llbracket n-r; n \rrbracket^2) \\ E_1(\tilde{f}) = \text{vect}(E_{i,j}, (i,j) \in \llbracket n-r; n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket) \\ E_{-1}(\tilde{f}) = \text{vect}(E_{i,j}, (i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket n-r; n \rrbracket) \end{cases}$$

Par dimension, l'endomorphisme est bien diagonalisable et sa trace qui vaut la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité vaut zéro.

Solution 4.

1. Si la matrice N admet une valeur propre $\lambda \neq 0$ et si $X \in E_\lambda(N) \setminus \{0\}$, alors la condition $MN = 0$ nous dit que $X \in \ker M$. Donc M et N ont bien un vecteur propre commun.

Si le spectre de N est réduit à $\{0\}$, alors N est nilpotente. Supposons $N \neq 0$, alors il existe $X \neq 0$ et $k \geq 2$ tels que $N^{k-1}X \neq 0$ et $N^k(X) = 0$. Par hypothèse $MN^{k-1}X = 0$ et donc $N^{k-1}X$ est un vecteur propre commun à M et N . La dimension impaire n'intervient pas ici.

2. Remarquons que la dimension impaire devient ici indispensable comme le montre le cas $n = 2$: si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $MN = 0$ et les matrices $M + M^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N + N^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont inversibles.

En effet, on a $\text{Im } N \subset \ker M$. Si $\text{rg } N \geq n+1$, alors par théorème du rang, $\text{rg } M \leq n$, mais alors $\text{rg } M + \text{rg } M^T \leq 2n$, ce qui contredit $M + M^T$ inversible.

Donc $\dim \ker N = \dim \ker N^T \geq n+1$. La formule de Grassman nous dit que $\dim(\ker N \cap \ker N^T) \geq 1$ et donc $N + N^T$ n'est pas inversible.