Colle n° 07

Réductions

Exercice 1. Soient un nombre complexe a et la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ de la matrice M.
2. On suppose que $a = 0$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On suppose que $a = \dfrac{1}{2}$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
4. On suppose que $a = \dfrac{27}{4}$. Montrer que le polynôme $\chi_M(X)$ et sa dérivée $\chi'_M(X)$ possèdent une racine commune. La matrice M est-elle diagonalisable ?
5. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ la matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2. Soient $n-1$ réels $a_1, \dots, a_{n-1}$ non tous nuls. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}).$$

Déterminer son rang et son spectre. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 3. Soit, pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1, 0, 0)$ la matrice identité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1. Montrer que l'ensemble F des matrices $M(a, b, c)$, où (a, b, c) parcourt $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.
2. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice J.
3. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice K.
4. Montrer qu'il existe une matrice P telle que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales. (C'est la même matrice P pour J et K.)
5. En déduire qu'il existe une matrice P telle que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P$ est diagonale. (Vous avez bien lu ? c'est la même matrice P pour tout (a, b, c).)
6. Quel est le spectre de la matrice $M(a, b, c)$?