Corrigé de la colle n° 06

Intégrale & réductions

4 novembre 2025

Exercice 1 (Oral Petites Mines 2010)**.** Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right)\, dx$?

Notons $f\colon x \in]0,+\infty[\mapsto \frac{\arctan x}{x}\ln(\frac{2+x}{1+x})$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ est impropre en 0 et en $+\infty$. Elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $\int_0^1 f$ et $\int_1^{+\infty} f$ convergent.

La fonction f est continue sur $]0,1]$ et a une limite finie en 0 (égale à $\ln 2$ car $\arctan x \sim x$), d'où l'intégrale $\int_0^1 f$ est convergente car elle est faussement impropre en 0.

Au voisinage de $+\infty$, on a $\ln(\frac{2+x}{1+x}) = \ln\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln\left[(1+\frac{2}{x})(1-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))\right] = \ln(1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})) = \frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$, donc

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2x^2}$$

car $\arctan x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. Or $\frac{1}{x^2}$ ne change pas de signe et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge (d'après le critère de Riemann en $+\infty$), ce qui montre que $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.

Exercice 2.

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\, dx$ converge.
2. Montrer que
$$I = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}.$$
3. Par le changement de variables $u = \tan\theta$, déterminer la valeur de I.

---

1. L'intégrale I est impropre en -1 et en $+1$. converge si, et seulement si, les deux intégrales
$$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{0}^{+1} \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$
convergent.

• Commençons par l'intégrale I_2, impropre en $+1$: $\frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ car $\frac{1}{2-x^2} \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ne change pas de signe et $\boxed{\int_0^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx \text{ converge d'après le critère de Riemann décalé en 1}}$.

D'où l'intégrale I_2 converge.

Autre méthode : $\frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qui ne change pas de signe. Or l'intégrale $\int_0^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ converge car : pour tout $y \in [0,1[$, $\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = [\text{Arcsin} x]_0^y = \text{Arcsin} y \underset{y\to1^-}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. D'où l'intétgrale I_2 converge.

• Et, de même, l'intégrale I_1 est convergente.

• Finalement, l'intégrale I converge.

2. Le changement de variable $x = \sin\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, $dx = \cos\theta\, d\theta$, $2 - x^2 = 1 + \cos^2\theta$ et $\sqrt{1-x^2} = |\cos\theta| = \cos\theta$ car $\cos\theta$ est positif sur l'intervalle d'intégration. Donc

$$I = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos\theta\, d\theta}{(1+\cos^2\theta)\cos\theta} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}.$$

3. Le changement de variable $u = \tan\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, $du = (1+\tan^2\theta)\, d\theta = (1+u^2)\, d\theta$, $\frac{1}{1+\cos^2\theta} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+u^2}}$, d'où $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+u^2}\, du.$

   Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+u^2}\, du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(u/\sqrt{2})^2}\, du = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\arctan(u/\sqrt{2})\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

Exercice 3. Soit α un réel et soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3-\alpha & \alpha-5 & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle diagonalisable ?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3+\alpha & 5-\alpha & -\alpha \\ \alpha & \lambda+2-\alpha & -\alpha \\ -5 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1'=C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 5-\alpha & -\alpha \\ \lambda+2 & \lambda+2-\alpha & -\alpha \\ 0 & 5 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_1'=L_2-L_1}{=} (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 5-\alpha & -\alpha \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 5 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-3).$$

D'où : $\mathrm{Sp}(A) = \{-2;3\}$ et $\begin{cases} 1 \le \dim SEP(-2) \le 2 \\ 1 \le \dim SEP(3) \le 1 \end{cases}$.

La matrice A est diagonalisable *ssi* $\dim SEP(-2) + \dim SEP(3) = \dim \mathbb{R}^3$, *ssi* $\dim SEP(-2) = 2$. On cherche les vecteurs propres associés à la valeur propre -2 :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff (*) \begin{cases} x = y \\ \alpha z = 0 \end{cases}.$$

– si $\alpha = 0$, alors $(*) \iff x = y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $\dim SEP(-2) = 2$, donc A est diagonalisable ;

– si $\alpha \neq 0$, alors $(*) \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $\dim SEP(-2) = 1$, donc A n'est pas diagonalisable.