

PROGRAMME DE LA COLLE N° 7

Semaine du 10/11/2025

Réduction ▷ Chapitre IV & TD n° 4 :

- vecteurs propres, sous-espaces propres, valeurs propres et spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ;
- un endomorphisme u est injectif *ssi* $0 \notin \text{Sp}(u)$;
- les racines du polynôme caractéristique χ_A sont les valeurs propres de la matrice carrée A et

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A), 1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda ;$$

- si χ_A est scindé, alors $\text{tr } A = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda \cdot \lambda$ et $\det A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda}$;
- déterminer le spectre et les sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ;
- les *SEP* sont en somme directe ;
- une matrice carrée A est diagonalisable *ssi* la somme des dimensions de ses *sep* égale la taille de la matrice, *ssi* χ_A est scindé et la dimension de chaque *sep* égale la multiplicité de la valeur propre, *ssi* ses *SEP* sont supplémentaires ;
- une matrice carrée de taille n est diagonalisable *si* elle possède n valeurs propres distinctes deux à deux ;
- une matrice carrée est trigonalisable *ssi* son polynôme caractéristique est scindé ;
- trigonaliser une matrice carrée sous une forme donnée ;
- utiliser la diagonalisation ou la trigonalisation pour découpler et résoudre un système linéaire de suites définies par récurrence ou un système linéaire d'équations différentielles, à coefficients constants et sans second membre ;
- le polynôme caractéristique d'une matrice est annulateur de cette matrice (théorème de Cayley & Hamilton) et est donc divisible par le polynôme minimal ;
- si P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme u , alors $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), P(\lambda) = 0$ (autrement dit, le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P) ;
- le spectre de u est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal μ_u , qui a les mêmes racines que le polynôme caractéristique χ_u ;
- une matrice est trigonalisable *ssi* elle possède un polynôme annulateur scindé ;
- une matrice est diagonalisable *ssi* elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples ;
- si deux endomorphismes commutent, alors les *SEP* de l'un sont stables par l'autre ;
- le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par u sur un *sev* stable divise le polynôme caractéristique de u ;
- si un endomorphisme u est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par u sur un *sev* stable aussi ;
- si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u est scindé, alors on peut définir ses sous-espaces caractéristiques et, d'après le lemme des noyaux, ces sous-espaces caractéristiques sont supplémentaires. Stabilité par u des *SEC* et dimension des *SEC*.