

F E U I L L E D E T . D . N° 5

Suites de fonctions

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = x^n \ln(x) \quad \text{si } x \in]0, 1] \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$. Vers quelle fonction f ?
2. Dresser le tableau des variations de chaque fonction f_n . La convergence de la suite (f_n) vers la fonction f est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

Exercice 2. Soit une constante $k \in \mathbb{R}$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto n^k x e^{-nx}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement : vers quelle fonction f ?
2. Pour quelles valeurs du réel k la convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3. Soit $a > 0$. Pour quelles valeurs du réel k la convergence est-elle uniforme sur $[a, +\infty[$?

Exercice 3. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{nx}{1+nx}$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une limite f et déterminer cette limite. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Ni sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais qu'elle l'est sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 0$.

Exercice 4. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{Arctan} \left(\frac{x+n}{1+nx} \right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. Vers quelle fonction f ?
2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^* N$, dresser le tableau des variations de la fonction $f - f_n$.
3. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?

Exercice 5. Soit une suite de fonctions $f_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ convergeant simplement sur $]0, 1[$ vers une fonction f . On suppose que :

1. chaque fonction f_n est croissante. Montrer que f l'est aussi.
2. chaque fonction f_n est bornée. Montrer que f ne l'est pas nécessairement. Et si la convergence est uniforme ?
3. chaque fonction f_n est polynomiale. Montrer que f ne l'est pas nécessairement. Et si la convergence est uniforme ?

Exercice 6. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ et étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. Montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$, de deux manières : en utilisant la question précédente et sans l'utiliser.
4. Soit $a > 0$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 7. Soit la suite des réels $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx$.

1. Étudier les variations de la suite (u_n) . En déduire qu'elle converge.
2. Déterminer une relation entre u_{n-1} et u_{n+1} . En déduire la limite de (u_n) .
3. Retrouver ces résultats en utilisant le théorème de la convergence dominée.

Exercice 8 (convergence dominée).

1. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$$

est une intégrale convergente.

2. Montrer que la suite des fonctions $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n + e^x}$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux.
3. Montrer que la suite (v_n) est une suite convergente et calculer sa limite.

Exercice 9. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t.$$

2. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) \geq f(x).$$

3. Soit un réel $A > 0$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in [0, A]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \exp\left(\frac{A^2}{2n}\right) - 1$.

(b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, A]$?

4. Montrer que chaque fonction f_n est décroissante.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall n \geq N, \forall x \geq A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

6. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 10. Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

1. La fonction f a-t-elle nécessairement une limite en $+\infty$?
2. Montrer que, si la limite existe, alors elle est nécessairement nulle.
3. Montrer que, si f est uniformément continue, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.