

CORRIGÉ DU T.D. N° 5

Suites de fonctions

6 novembre 2025

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = x^n \ln(x) \quad \text{si } x \in]0, 1] \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$. Vers quelle fonction f ?
2. Dresser le tableau des variations de chaque fonction f_n . La convergence de la suite (f_n) vers la fonction f est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

-
1. $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$; si $x \in]0, 1[$, alors $f_n(x) = x^n \ln(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ car $x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$; $f_n(1) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$.
 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie les variations de $f_n : \forall x \in]0, 1], f'_n(x) = x^{n-1} \cdot [n \ln(x) + 1]$.

x	0	$e^{-1/n}$			1
$f'_n(x)$		–	0	+	
$f_n(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0
			$-\frac{1}{ne}$		

D'où $\max_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{ne} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Donc la convergence est uniforme.

Exercice 2. Soit une constante $k \in \mathbb{R}$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto n^k x e^{-nx}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement : vers quelle fonction f ?
2. Pour quelles valeurs du réel k la convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3. Soit $a > 0$. Pour quelles valeurs du réel k la convergence est-elle uniforme sur $[a, +\infty[$?

-
1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$:
 - si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ ;
 - si $x > 0$, alors $f_n(x) = n^k x e^{-nx}$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ par croissances comparées.
 D'où la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$.
 2. Chaque fonction f_n est dérivable et $f'_n(x) = n^k(1 - nx)e^{-nx}$, d'où le tableau des variations :

x	0	$1/n$			
$f'_n(x)$		+	0	–	
$f_n(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	0		n^{k-1}/e		0

On en déduit que $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = \frac{n^{k-1}}{e}$ tend vers 0 si, et seulement si, $k < 1$.

Donc la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $k < 1$.

3. Soit $a > 0$. Chaque fonction f_n est décroissante sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$. Or, à partir d'un certain rang : $a > \frac{1}{n}$, d'où la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$, d'où $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = f_n(a) = n^k a e^{-na}$ tend vers 0, donc la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$, quelle que soit la valeur de la constante k .

Exercice 3. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{nx}{1+nx}$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une limite f et déterminer cette limite. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Ni sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais qu'elle l'est sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 0$.

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Si $x > 0$, alors $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. D'où la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$ car la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$ alors que les fonctions f_n le sont.

Autre méthode : Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{1}{n}$: $|f_n(u_n) - f(u_n)| = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini. D'où $\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)|$ ne tend pas non plus vers zéro. Donc la convergence de la suite (f_n) n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Ni sur $\mathbb{R}_+^*$ car, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > a$, $0 \leq |1 - f_n(x)| = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na}$ qui est un majorant. D'où $0 \leq \sup_{x \in [a, +\infty[} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{1+na}$ car le $\sup$ est le plus petit majorant. Or $\frac{1}{1+na} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'où $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ d'après le théorème des gendarmes. Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 4. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \text{Arctan} \left(\frac{x+n}{1+nx} \right).$$

- Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. Vers quelle fonction f ?
- Pour chaque $n \in \mathbb{N}^* N$, dresser le tableau des variations de la fonction $f - f_n$.
- La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?

1. Si $x = 0$, alors $f_n(0) = \text{Arctan}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$.

Si $x > 0$, alors $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$.

Donc, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$ et cette fonction f est continue.

2. La fonction $g_n = f - f_n$ est dérivable et, pour tout $x \geq 0$:

$$g_n(x) = \text{Arctan} \left(\frac{1+nx}{x+n} \right) - \text{Arctan}(x) \quad \text{et} \quad g'_n(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+nx}{x+n}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2(1+2nx+x^2)}{[(x+n)^2 + (1+nx)^2](1+x^2)} \leq 0,$$

d'où le tableau des variations :

x	0	$+\infty$
$g'_n(x)$		—
$g_n(x)$	$\text{Arctan} \frac{1}{n}$	$-\text{Arctan} \frac{1}{n}$

3. D'où $\sup_{x \in [0, +\infty[} |g_n(x)| = \max \left(\left| \text{Arctan} \frac{1}{n} \right|, \left| -\text{Arctan} \frac{1}{n} \right| \right) = \text{Arctan} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f .

Exercice 5. Soit une suite de fonctions $f_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ convergeant simplement sur $]0, 1[$ vers une fonction f . On suppose que :

1. chaque fonction f_n est croissante. Montrer que f l'est aussi.
2. chaque fonction f_n est bornée. Montrer que f ne l'est pas nécessairement. Et si la convergence est uniforme ?
3. chaque fonction f_n est polynomiale. Montrer que f ne l'est pas nécessairement. Et si la convergence est uniforme ?

On note $a = 0$ et $b = 1$.

1. Soient deux réels x_1 et x_2 de $]a, b[$ tels que $x_1 \leq x_2$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante, d'où les réels $u_n = f_n(x_1)$ et $v_n = f_n(x_2)$ sont tels que $u_n \leq v_n$. Or $\lim u_n = f(x_1)$ et $\lim v_n = f(x_2)$ car f_n converge simplement vers f . Les inégalités larges passent à la limite, d'où $\lim u_n \leq \lim v_n$. D'où $f(x_1) \leq f(x_2)$. Donc la fonction f est croissante.
2. La fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{(x-a)(b-x)}$ n'est pas bornée. Mais c'est la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des fonctions $f_n :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui sont bornées.

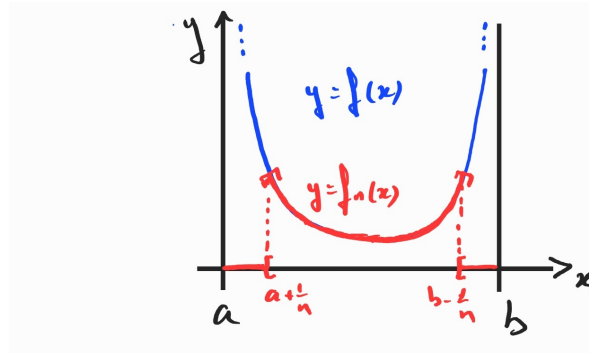


FIGURE 1 – UNE SUITE DE FONCTIONS BORNÉES QUI CONVERGE SIMPLEMENT VERS UNE FONCTION NON BORNÉE.

Et si la convergence est uniforme, alors $\sup_{x \in]a, b[} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{x \in]a, b[} |f_N(x) - f(x)| \leq 1$.

Or, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) = f(x) - f_N(x) + f_N(x)$, d'où $|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq 1 + M$, où M est un majorant de la fonction $|f_N|$ (un tel majorant existe car la fonction f_N est bornée). Donc la fonction f est bornée.

3.

Exercice 6. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ et étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. Montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$, de deux manières : en utilisant la question précédente et sans l'utiliser.
4. Soit $a > 0$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

-
1. Soit $x \in [0, 1]$. Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$. Si $x \neq 0$, alors $f_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^n x}{n 2^n x^2} \sim \frac{1}{n x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$.

$$2. I_n = \int_0^1 \frac{2^n t}{1 + n2^n t^2} dt = \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{2n2^n t}{1 + n2^n t^2} dt = \frac{1}{2n} \int_0^{n2^n} \frac{du}{1 + u}$$

après le CDV $u = n2^n t^2$ ($du = 2n2^n t dt$). La fonction $t \mapsto n2^n t^2$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$. D'où $I_n = \frac{1}{2n} [\ln(1 + u)]_0^{n2^n}$.

$$\text{Donc } I_n = \frac{\ln(1 + n2^n)}{2n} = \frac{\ln(n2^n) + \ln(1 + \frac{1}{n2^n})}{2n} = \frac{n \ln 2 + \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n2^n})}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2}{2}.$$

3. Par l'absurde : si (f_n) converge uniformément vers 0 (la fonction nulle), alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \frac{\ln 2}{2}$ est égal à $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = 0$. C'est absurde. Donc la convergence n'est pas uniforme.

AUTRE MÉTHODE — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in [0, 1]$ et $|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = \frac{2^n \frac{1}{n}}{1 + 2^n \frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$ ne tend pas vers zéro quand n tend vers ∞ . Or $\sup_{[0,1]} |f_n - f| \geq |f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})|$, d'où $\sup_{[0,1]} |f_n - f|$ ne tend pas vers zéro quand n tend vers ∞ . Donc la convergence de f_n vers f n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

4. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} - 0 \right| \leq \frac{2^n x}{n2^n x^2} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{na}$,

d'où $0 \leq \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{na}$, donc la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers 0 (la fonction nulle).

Exercice 7. Soit la suite des réels $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx$.

1. Etudier les variations de la suite (u_n) . En déduire qu'elle converge.
2. Déterminer une relation entre u_{n-1} et u_{n+1} . En déduire la limite de (u_n) .
3. Retrouver ces résultats en utilisant le théorème de la convergence dominée.

1. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $0 \leq \tan x \leq 1$, d'où $0 \leq \tan^{n+1} x \leq \tan^n x$.

D'où (croissance de l'intégrale) : $0 \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{n+1} x dx \leq \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$. D'où la suite (u_n) est décroissante. Et minorée par 0. Donc la suite (u_n) est convergente.

2. $u_{n-1} + u_{n+1} = \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1} x \cdot (1 + \tan^2 x) dx$. Or $1 + \tan^2 x = \tan' x$.

$$\text{D'où } u_{n-1} + u_{n+1} = \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1}(x) \cdot \tan'(x) dx = \left[\frac{\tan^n(x)}{n} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n}.$$

Notons ℓ la limite de u_n (on sait que cette limite existe et est réelle car la suite (u_n) converge). L'égalité $u_{n-1} + u_{n+1} = \frac{1}{n}$ passe à la limite et devient : $\ell + \ell = 0$. Donc $\lim u_n = 0$.

3. On utilise le théorème de la convergence dominée :

* Chaque fonction $f_n : [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan^n(x)$ est continue par morceaux (et même continue).

** f_n converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ vers la fonction $f : [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \pi/4 \\ 1 & \text{si } x = \pi/4 \end{cases}$, continue par morceaux.

*** $\forall x \in [0, \pi/4], |f_n(x)| \leq 1$ (fonction indépendante de n) et l'intégrale $\int_0^{\pi/4} 1 dx$ converge.

$$\text{D'où } \int_0^{\pi/4} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/4} f(x) dx = 0. \text{ Donc } u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exercice 8 (convergence dominée).

1. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$$

est une intégrale convergente.

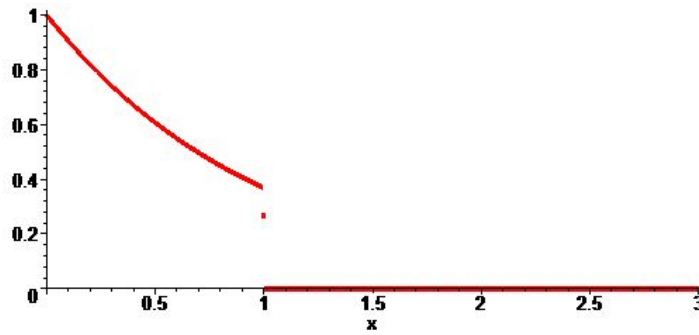


FIGURE 2 – LA LIMITE f DE LA SUITE DES FONCTIONS $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^n + e^x}$.

2. Montrer que la suite des fonctions $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^n + e^x}$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux.
3. Montrer que la suite (v_n) est une suite convergente et calculer sa limite.

1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^n + e^x}$.

$\forall x \in [0, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{1}{e^x}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge, d'où l'intégrale impropre $v_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ converge.

2. Soit $x \in [0, +\infty[: f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{1+e} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Donc la suite de fonctions f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la

fonction

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x} \text{ si } x \in [0, 1[, \frac{1}{1+e} \text{ si } x = 1 \text{ et } 0 \text{ si } x > 1$$

représentée sur la figure 2.

3. On utilise le théorème de la convergence dominée :

* Chaque fonction f_n est continue par morceaux.

** f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f , continue par morceaux.

*** $\forall x \in [0, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{1}{e^x}$ (qui ne dépend pas de n) et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge.

D'où $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e}$. Donc $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{e}$.

Exercice 9. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t.$$

2. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) \geq f(x).$$

3. Soit un réel $A > 0$.

- (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, A]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \exp\left(\frac{A^2}{2n}\right) - 1$.
- (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, A]$?
4. Montrer que chaque fonction f_n est décroissante.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall n \geq N, \forall x \geq A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

6. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

1. On étudie les variations des deux fonctions dérivables

$$g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t - \ln(1+t) \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geq 0 \quad \text{et} \quad h'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{t^2}{1+t} \geq 0.$$

Elles sont donc croissantes sur $\mathbb{R}_+$, or elles sont nulles en 0, donc elles sont positives sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall t \geq 0, t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t.$$

2. Soit $x \geq 0$: $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} = \exp\left[-n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right]$. Quand n tend vers ∞ , $\frac{x}{n}$ tend vers 0.
- Or (développement limité) : $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + \frac{x}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)$. D'où $-n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = -x - x\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -x$.
- D'où (par continuité de $\exp$) : $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-x}$.

Donc la suite des fonctions f_n converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}$.

De plus, pour tout $t \geq 0$, $\ln(1+t) \leq t$ (d'après la question 1), d'où : pour tous $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $-n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \geq -n \frac{x}{n}$,

donc (par croissance de $\exp$) :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) \geq f(x).$$

3. (a) D'après la question 1, pour tous $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \leq e^{-x + \frac{x^2}{2n}}$.

D'où, pour tout $x \in [0, A]$, $f_n(x) \leq e^{-x} e^{\frac{A^2}{2n}}$.

On en déduit que : $f_n(x) - f(x) \leq e^{-x} \left[e^{\frac{A^2}{2n}} - 1 \right] \leq e^{\frac{A^2}{2n}} - 1$.

De plus, $0 \leq f_n(x) - f(x)$ d'après la question 2. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, A], |f_n(x) - f(x)| \leq e^{\frac{A^2}{2n}} - 1.$$

- (b) De la majoration précédente, on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{[0, A]} |f_n - f| \leq e^{\frac{A^2}{2n}} - 1$.

Or $e^{\frac{A^2}{2n}} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'où $\sup_{[0, A]} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Donc la suite des fonctions f_n converge uniformément sur $[0, A]$ vers la fonction f .

4. Chaque fonction f_n est dérivable et, pour tout $x \geq 0$, $f'_n(x) = -n(1 + \frac{x}{n})^{-n-1} \cdot \frac{1}{n} \leq 0$.

Donc chaque fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

5. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [A, +\infty[$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - e^{-x}| &\leq |f_n(x)| + |e^{-x}| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ &\leq f_n(x) + e^{-x} \text{ (car } f_n \text{ est positive)} \\ &\leq f_n(A) + e^{-x} \text{ (d'après la question 4)} \\ &\leq f_n(A) - e^{-A} + e^{-A} + e^{-x} \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$:

- si A est assez grand, alors $e^{-A} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, d'où $e^{-x} \leq e^{-A} \leq \frac{\varepsilon}{3}$;
- si n est assez grand, alors $|f_n(A) - e^{-A}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (car f_n converge simplement vers f).

Donc $\exists A \in \mathbb{R}_+$, $\exists N_A \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq N_A$, $\forall x \geq A$, $|f_n(x) - e^{-x}| \leq \varepsilon$.

6. On a montré que la suite des fonctions f_n converge uniformément sur $[0, A]$ vers f , d'où :

$$\exists N' \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N', \forall x \in [0, A], |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Choisissons le A et le N de la question 5 et posons $N'' = \max(N, N')$. Alors

$$\forall n \geq N'', \forall x \in [0, A] \cup [A, +\infty[, |f_n(x) - e^{-x}| \leq \varepsilon.$$

Donc la suite des fonctions f_n converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f .

Exercice 10. Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

1. La fonction f a-t-elle nécessairement une limite en $+\infty$?
2. Montrer que, si la limite existe, alors elle est nécessairement nulle.
3. Montrer que, si f est uniformément continue, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

-
1. Voir un contre-exemple sur la figure.

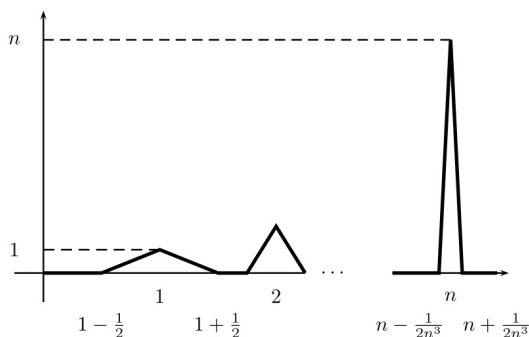


FIGURE 3 – Pas de divergence grossière pour les intégrales généralisées

2. Raisonnons par l'absurde et montrons que si la limite est non nulle, l'intégrale ne peut pas converger absolument.

PREMIER CAS : si la limite est finie. Soit $\ell \neq 0$ la limite de f . Il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \geq x_0, \quad f(x) \geq \frac{\ell}{2}$$

On en déduit que :

$$\int_{x_0}^x f(x)dx \geq \int_{x_0}^x \frac{\ell}{2}dx = \frac{\ell}{2}(x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

et donc l'intégrale ne peut pas converger.

SECOND CAS : si la limite vaut $\pm\infty$. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \geq x_0, \quad f(x) \geq 17.$$

Et on conclut comme dans le premier cas.

3. Une nouvelle fois, raisonnons par l'absurde. Supposons que $f(x)$ ne tend pas vers 0 et que f est uniformément continue. Montrons que l'intégrale diverge. La fonction ne tend pas vers 0, d'où : il existe un réel $\varepsilon > 0$ et il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) > \varepsilon.$$

Par la continuité uniforme, pour cet epsilon :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |x_n - x| < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |f(x) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{d'où } |f(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

On peut ensuite extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > u_{n-1} + \alpha.$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{u_n + \frac{\alpha}{2}} f(x)dx \geq n\alpha \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

L'intégrale ne peut donc pas converger.