

K D O D U 1 0 / 1 1 / 2 0 2 5

*R é d u c t i o n***Exercice 1** (Diagonalisation simultanée).

Soient A et B deux matrices diagonalisables. Montrer que : les matrices A et B commutent ($AB = BA$) si, et seulement si, il existe une même matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont toutes deux diagonales.

Exercice 2. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un entier naturel impair k tel que $A^k = B^k$.

1. Comparer les sous-espaces propres des matrices A et A^k .
2. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que les matrices $A' = P^{-1}AP$ et $B' = P^{-1}BP$ soient de la forme :

$$A' = \begin{matrix} & \begin{matrix} \xleftrightarrow{d_1} & \xleftrightarrow{d_2} & \dots & \xleftrightarrow{d_r} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \updownarrow d_1 \\ \updownarrow d_2 \\ \vdots \\ \updownarrow d_r \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 I_{d_1} & \vdots & 0 & \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \vdots & \lambda_2 I_{d_2} & \vdots \\ & & \dots & \ddots \\ & 0 & & \vdots \\ & & & \lambda_r I_{d_r} \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{matrix} & \begin{matrix} \xleftrightarrow{d_1} & \xleftrightarrow{d_2} & \dots & \xleftrightarrow{d_r} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \updownarrow d_1 \\ \updownarrow d_2 \\ \vdots \\ \updownarrow d_r \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} B_1 & \vdots & 0 & \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \vdots & B_2 & \vdots \\ & & \dots & \ddots \\ & 0 & & \vdots \\ & & & B_r \end{array} \right) \end{matrix}.$$

3. En déduire que : $A = B$.
4. Cette dernière propriété est-elle encore vraie si k est pair ? si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?