Corrigé du Kdo du 10/11/2025

Réduction

13 novembre 2025

Exercice 1 (Diagonalisation simultanée)**.**

Soient A et B deux matrices diagonalisables. Montrer que : les matrices A et B commutent ($AB = BA$) si, et seulement si, il existe une même matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont toutes deux diagonales.

A et B sont les matrices, dans une base $\mathcal{B}$ d'un *ev* E, de deux endomorphismes a et b. La matrice A est diagonalisable, d'où il existe une matrice inversible Q telle que $A' = Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}\left(\lambda_1 I_{d_1}, \cdots, \lambda_p I_{d_p}\right)$. La matrice Q est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{C}$ formée de vecteurs propres de a. Cette base $\mathcal{C}$ est la concaténation de p bases $\mathcal{C}_i$ des p *sep* $E_i = E_{\lambda_i}(a)$, de dimensions d_i.

Les matrices A et B commutent, d'où chaque *sep* E_i de a est stable par b, donc la matrice $B' = P^{-1}BP$ de b dans la base $\mathcal{C}$ est diagonale par blocs :

$$A' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{d_r}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \\ \vdots \\ d_r \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_r I_{d_r} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad B' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{d_r}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \\ \vdots \\ d_r \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} B_1 & 0 & & \\ 0 & B_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & B_r \end{pmatrix} \end{array}.$$

Chaque bloc B_i est la matrice, dans la base $\mathcal{C}_i$, de l'endomorphisme b_i induit par b sur le *sev* stable E_i. Or b est diagonalisable, donc chaque b_i l'est aussi ▷ **proposition 40 du chapitre IV**. Il existe donc une base $\mathcal{D}_i$ de E_i formée de vecteurs propres de b_i. La concaténation des bases $\mathcal{D}_i$ est une base $\mathcal{D}$ de l'ev E. Cette base est formée de vecteurs propres communs à a et b. Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers cette base $\mathcal{D}$, alors les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont toutes deux diagonales.

Réciproquement : si les matrices A et B sont simultanément diagonalisables, alors il existe une matrice inversible P telle que les deux matrices $A' = P^{-1}AP$ et $B' = P^{-1}BP$ sont diagonales. Par suite $A'B' = B'A'$. Et donc $AB = BA$.

Exercice 2. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un entier naturel impair k tel que $A^k = B^k$.

1. Comparer les sous-espaces propres des matrices A et A^k.
2. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que les matrices $A' = P^{-1}AP$ et $B' = P^{-1}BP$ soient de le forme :

$$A' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{d_r}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \\ \vdots \\ d_r \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_r I_{d_r} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad B' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{d_r}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \\ \vdots \\ d_r \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} B_1 & 0 & & \\ 0 & B_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & B_r \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. En déduire que : $A = B$.
4. Cette dernière propriété est-elle encore vraie si k est pair ? si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

---

1. A et B sont les matrices, dans une base $\mathcal{B}$ d'un *ev* E, de deux endomorphismes a et b. La matrice A est diagonalisable, d'où il existe une matrice inversible P telle que la matrice $A' = P^{-1}AP = \operatorname{diag}\left(\lambda_1 I_{d_1}, \cdots, \lambda_p I_{d_p}\right)$ est diagonale. La matrice P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{C}$ formée de vecteurs propres de a. Cette base $\mathcal{C}$ est la concaténation de p bases $\mathcal{C}_i$ des p *sep* $E_i = E_{\lambda_i}(a)$, de dimensions d_i.

   Par suite $P^{-1}A^kP = \operatorname{diag}\left(\lambda_1^k I_{d_1}, \cdots, \lambda_p^k I_{d_p}\right)$. Or l'entier k est impair et chaque λ_i est un réel, d'où les p réels λ_i^k sont distincts deux à deux. Par suite $E_{\lambda_i}(a) = E_{\lambda_i^k}(a^k)$ pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$.

2. La matrice B commute avec A^k car $A^k = B^k$. D'où les *sep* de a^k sont stables par b. Or les *sep* de a^k sont égaux aux *sep* de a d'après la question 1, d'où chaque *sep* E_i de a est stable par b, donc la matrice $B' = P^{-1}BP$ de b dans la base $\mathcal{C}$ est diagonale par blocs :

$$A' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{d_r}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \\ \vdots \\ d_r \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_r I_{d_r} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad B' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{d_r}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \\ \vdots \\ d_r \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} B_1 & 0 & & \\ 0 & B_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & B_r \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. Chaque bloc B_i est la matrice, dans la base $\mathcal{C}_i$, de l'endomorphisme b_i induit par b sur le *sev* stable E_i. Or b est diagonalisable, donc chaque b_i l'est aussi ▷ **proposition 40 du chapitre IV**. Il existe donc une base $\mathcal{D}_i$ de E_i formée de vecteurs propres de b_i. La concaténation des bases $\mathcal{D}_i$ est une base $\mathcal{D}$ de l'ev E. Cette base est formée de vecteurs propres communs à a et b. Si Q est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers cette base $\mathcal{D}$, alors les matrices $Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $Q^{-1}BQ = \operatorname{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ sont toutes deux diagonales.Or $A^k = B^k$, d'où $\alpha_i^k = \beta_i^k$ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$. Mais k est un entier impair et les α_i et β_i sont des réels, d'où $\alpha_i = \beta_i$ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$. Donc $A = B$.
4. Si k est pair et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors voici un contre-exemple : les matrices I_n et $-I_n$ ne sont pas égales mais $I_n^k = (-I_n)^k$.

   Si k est un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors voici un contre-exemple : en notant ω une racine complexe $k-$ième de l'unité différente de 1, les matrices I_n et ωI_n sont différentes mais $I_n^k = (\omega I_n)^k$.