Colle 08 suites de fonctions

MARTIENNE Lucie

Exercice 1. ♡ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $I =]-\pi, \pi[$ par

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{n \sin x}, \ x \neq 0.$$

Étudier la convergence simple ou uniforme de la suite (f_n) sur tout ou partie de l'intervalle I.

Exercice 2. Déterminer un développement asymptotique de $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n}$ en $o\left(1/n^2\right)$.

Solution **1.** *On a*
$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in I \setminus \{0\},\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n \sin x}.$$
On a donc convergence simple sur I de la suite (f_n) vers la fonction nulle (la convergence simple en 0 est évidente) mais on n'a pas de convergence uniforme vers la fonction nulle car si $x_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \sin^2 1 \neq 0$.
Par contre sur tout segment de la forme $[-\pi+\delta, \delta]$ ou $[\delta, \pi-\delta]$, on a
$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in I \setminus \{0\},\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n \sin \delta},$$
qui donne la convergence uniforme.

Solution **2.** *On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{v^{1/n}}{1+v}\mathrm{d}v$. Le changement de variable $v = u^n$ donne :*
$$u_n - 1 = \int_0^1 \frac{1}{1+u^n}\mathrm{d}u - 1 = \int_0^1 \frac{-u^n}{1+u^n}\mathrm{d}u = -\frac{1}{n} I_n$$
On cherche le développement asymptotique de I_n à l'aide du théorème de convergence dominée.

— ***Terme d'ordre 0 :*** *La suite de fonctions $f_n : v \mapsto \frac{v^{1/n}}{1+v}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $v \mapsto \frac{1}{1+v}$. Elle est dominée par la fonction intégrable $v \mapsto \frac{1}{1+v}$ sur $[0,1]$. Donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+v}\mathrm{d}v = \ln 2$. On a $I_n = \ln 2 + o(1)$.*

— ***Terme d'ordre 1 :*** *On étudie la limite de $n(I_n - \ln 2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{v^{1/n}-1}{1/n}\frac{1}{1+v}\mathrm{d}v$. L'intégrande converge simplement vers $v \mapsto \ln(v)\frac{1}{1+v}$. En admettant la domination (par exemple par $|\ln v|/(1+v)$ qui est intégrable), on obtient :*
$$\lim_{n\to+\infty} n(I_n - \ln 2) = \int_0^1 \frac{\ln v}{1+v}\mathrm{d}v = -\frac{\pi^2}{12}$$
Donc $I_n = \ln 2 - \frac{\pi^2}{12n} + o(1/n)$.

En injectant ce résultat dans l'expression de u_n :
$$u_n = 1 - \frac{1}{n}\left(\ln 2 - \frac{\pi^2}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

MOREL Jules

Exercice 3. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle simplement et vers quelle fonction ?
2. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $[-a, a]$, $a > 0$?

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer la convergence de I_n.
b) Étudier la convergence et la limite éventuelle de $(\ I_n\ )$.
c) Trouver un équivalent simple de I_n.

Solution **3.**

Solution **4.** *1/ Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout n. Pour $x \neq 0$ fixé, $f_n(x) \sim x$ donc f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto x$.*
2/ Pour $x_n = n$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) - f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} n(\sin(1) - 1) = -\infty$$

donc on n'a pas la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
3/ Sur le segment $[-a, a]$, on étudie la fonction $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, $g_n'(x) = \cos\left(\dfrac{x}{n}\right) - 1$ qui est décroissante négative sur $[-a, a]$ et donc $|g_n(x)| \leq |g_n(a)| = a - n\sin\dfrac{a}{n}$ qui tend vers 0 et donc on a la convergence uniforme sur tout segment.

Solution **5.**

a) ***Convergence de I_n***

La fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2}$ si $t \neq 0$ et 0 sinon est continue et négative sur $[0, 1[$.
En 1 : On pose $t = 1 - h$ avec $h \to 0^+$.

$$f_n(1-h) = \frac{(1-h)^{n+1}\ln(1-h)}{1-(1-h)^2} = \frac{(1-h)^{n+1}\ln(1-h)}{2h-h^2} \underset{h\to0^+}{\sim} \frac{1\cdot(-h)}{2h} = -\frac{1}{2}$$

La fonction se prolonge aussi par continuité en 1 en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$. I_n est bien définie.

*b) **Limite de** (I_n)*

On applique le théorème de convergence dominée. Soit $f_n(t) = \dfrac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2}$ *sur* $]0,1[$.

- *Pour tout* $t \in]0,1[$*, la suite* $(t^{n+1})_n$ *converge vers 0. Donc* $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$*. La suite de fonctions* (f_n) *converge simplement vers la fonction nulle sur* $]0,1[$.
- ***Hypothèse de domination :*** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $t \in]0,1[$*, on a* $0 < t^{n+1} \leq t$*. Ainsi,* $|f_n(t)| \leq \dfrac{t|\ln t|}{1-t^2} = -f_0(t)$*. La fonction majorante* $-f_0$ *est intégrable sur* $]0,1[$ *(d'après la question a).*

Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 0 \cdot \mathrm{d}t = 0$$

*c) **Équivalent de** I_n*

On cherche le comportement asymptotique de $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \cdot \left(\frac{t\ln t}{1-t^2}\right)\mathrm{d}t$*. Posons* $g(t) = \dfrac{t\ln t}{1-t^2}$ *pour* $t \in]0,1[$*. On a vu en a) que* g *est prolongeable par continuité sur* $[0,1]$ *en posant* $g(0) = 0$ *et* $g(1) = -1/2$*. Nous allons montrer que* $(n+1)I_n \to g(1)$*. Effectuons le changement de variable* $u = t^{n+1}$ *dans l'intégrale* I_n*. On a* $t = u^{\frac{1}{n+1}}$ *et* $\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}u^{\frac{1}{n+1}-1}\mathrm{d}u$.

$$I_n = \int_0^1 u^{\frac{n}{n+1}} g(u^{\frac{1}{n+1}}) \frac{1}{n+1} u^{\frac{1}{n+1}-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{n+1}\int_0^1 g(u^{\frac{1}{n+1}})\mathrm{d}u$$

Donc $(n+1)I_n = \int_0^1 h_n(u)\mathrm{d}u$ *avec* $h_n(u) = g(u^{\frac{1}{n+1}})$.

- *Pour tout* $u \in]0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} u^{\frac{1}{n+1}} = 1$*, donc par continuité de* g *en 1,* $\lim_{n\to+\infty} h_n(u) = g(1) = -1/2$.
- *La fonction* g *étant continue sur le segment* $[0,1]$*, elle est bornée par une constante* M*. On a* $|h_n(u)| \leq M$ *pour tout* $u \in]0,1]$*, et la fonction constante* M *est intégrable sur* $[0,1]$.

Par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}$$

On en déduit l'équivalent :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1/2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

Exercice 5. ♡ Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $f_n(x) = (n+1)\sin x \cos^n x$.

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de la forme $[\delta, \frac{\pi}{2} - \delta]$ avec $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.
3. Calculer $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt \right)$. La convergence de la suite est-elle uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?

Exercice 6. f est une fonction $\mathcal{C}^2$ de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on pose

$$f_n : x \geq 1 \mapsto \frac{n}{x}\left(f\left(x + \frac{x}{n} \right) - f(x) \right).$$

1. Etudier la convergence simple de (f_n).
2. Ici, $f(x) = \ln(x)$. Montrer que la convergence est uniforme.
3. Ici $f = \cos$. Montrer que la convergence n'est pas uniforme.
4. On suppose que $x \mapsto x f''(x)$ est bornée.
   Montrer que (f_n) converge uniformément.
   Si on suppose de plus que $\frac{f(x)}{x}$ converge en $+\infty$, qu'en déduire sur le comportement de f' en $+\infty$?

Solution **6.**

1. *Pour* $\in]0, \frac{\pi}{2}]$, $|\cos x| < 1$ *et donc* $\lim_{n\to+\infty} (n+1) \sin x \cos^{n+1} x = 0$ *(le critère* u_{n+1}/u_n *par exemple !).*
   De plus, $f_n(0) = 0$.
   La suite (f_n) *converge donc simlement vers la fonction nulle.*
2. *La convergence est uniforme sur* $[\delta, \frac{\pi}{2}]$. *On écrit alors*
   $$(n+1)|\sin x \cos^n x| \leq (n+1)\cos^n \delta.$$
   D'où la convergence uniforme.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt = \left[-\cos^{n+1} x\right]_0^{\pi/2}$. *Si la convergence était uniforme sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$, *on aurait*
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = 0.$$

Solution **7.**

1. *Converge vers* f'
2. $|f_n(x) - 1/x| = \frac{1}{x}|n\ln(1+1/n) - 1| \leq |n\ln(1+1/n) - 1| \to 0$.
3. $f_n(n\pi) - \sin(n\pi) = 2\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}$ *ne tend pas vers 0.*
4. *Par Taylor-Lagrange,*
   $$|f_n(x) - f'(x)| = \left|\frac{n}{x}\left(f\left(x+\frac{x}{n}\right) - f(x)\right) - f'(x)\right| \leq \frac{x}{n}\sup{[x, x+x/n]}|f''| \leq C/n$$
   d'où la CU.
   Par CU, on applique la double limite : Soit $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x$.
   $$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f'(x) &= \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n\to+\infty} n \lim_{x\to+\infty} \left((1+1/n)\frac{f(x+x/n)}{x+x/n} - \frac{f(x)}{x}\right) \\ &= nl/n = l \end{aligned}$$