Corrigé de la colle n° 07

Réductions

13 novembre 2025

Exercice 1. Soient un nombre complexe a et la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ de la matrice M.
2. On suppose que $a = 0$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On suppose que $a = \dfrac{1}{2}$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
4. On suppose que $a = \dfrac{27}{4}$. Montrer que le polynôme $\chi_M(X)$ et sa dérivée $\chi'_M(X)$ possèdent une racine commune. La matrice M est-elle diagonalisable ?
5. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ la matrice M est-elle diagonalisable ?

---

1. $\forall z \in \mathbb{C},\ \chi_M(z) = \begin{vmatrix} z & 0 & -a \\ -1 & z & 0 \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = z^3 - az - a.$
2. Si $a = 0$ alors $\chi_M(X) = X^3$, d'où 0 est l'unique valeur propre de M. Si M est diagonalisable, alors il existe P telle que $P^{-1}MP = 0$. C'est absurde car $M \neq 0$. Donc M n'est pas diagonalisable.
3. Si $a = \dfrac{1}{2}$, alors $\chi_M(X) = X^3 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = (X-1)(X^2 + X + \frac{1}{2})$. D'où $\mathrm{Sp}(M) = \left\{1; -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right\}$. La matrice M possède 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc M est diagonalisable.
4. La dérivée du polynôme $\chi_M(X)$ est le polynôme $\chi'_M(X) = 3X^2 - a$. Si $a = \dfrac{27}{4}$, alors $-\dfrac{3}{2}$ est une racine de $\chi_M(X)$ et de $\chi'_M(X)$, d'où $-\dfrac{3}{2}$ est une racine au moins double de $\chi_M(X)$.

   $\chi_M(X = (X + \frac{3}{2})(X - 3)$, do'ù $\mathrm{Sp}(M) = \{-\frac{3}{2}; 3\}$ et $\begin{cases} \dim E_3(M) = 1 \\ 1 \leq \dim E_{-3/2}(M) \leq 2 \end{cases}$. La matrice M est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_3(M) + \dim E_{-3/2}(M) = 3$ si, et seulement si, $\dim E_{-3/2}(M) = 2$. Or

   $$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -9/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   D'où $\dim E_{-3/2}(M) = 1$. Donc M n'est pas diagonalisable.
5. Si le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ possède une racine z double, alors $\chi_M(z) = z^3 - az - a = 0$ et $\chi'_M(z) = 3z^2 - a = 0$. D'où $a = 0$ ou $z = -\frac{3}{2}$ (car $0 = 3\chi_M(z) - z\chi'_M(z) = -2az - 3a$).

   Si $a = 0$, alors M n'est pas diagonalisable (question 2).

   Si $z = -\frac{3}{2}$, alors $a = \frac{27}{4}$, d'où M n'est pas diagonalisable (question 4).

   Sinon, les racines du polynôme caractéristique sont simples, d'où il existe 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc M est diagonalisable.

   Donc la matrice M est diagonalisable si, et seulement si, $a \in \mathbb{C} \setminus \left\{0; \frac{27}{4}\right\}$.

Exercice 2. Soient $n-1$ réels $a_1, \dots, a_{n-1}$ non tous nuls. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}).$$

Déterminer son rang et son spectre. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

---

1. Méthode 1 (sans polynôme caractéristique) — Le rang de A est égal à 2 car les réels a_i ne sont pas tous nuls, par hypothèse. D'où 0 est une valeur propre et le *sep* $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $n-2$ d'après le théorème du rang. Existe-t-il d'autres valeurs propres ? Soient $\lambda \neq 0$ et $X = (x_1 \cdots x_n)^T$:

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} a_1 x_n = \lambda x_1 \\ a_2 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ x_i = \frac{a_i}{\lambda} x_n \\ (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2) x_n = \lambda^2 x_n \end{cases}$$

On cheche un vecteur propre, supposons donc que le vecteur-colonne X est non nul. Alors

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} \lambda^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 \\ X = x_n (a_1\ a_2 \cdots a_{n-1}\ \lambda)^T \end{cases}$$

D'où il y a deux valeurs propres $\pm toto$, où $toto = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2} \neq 0$ car les réels a_i ne sont pas tous nuls, par hypothèse. De plus $\dim E_{+toto}(A) = 1 = \dim E_{-toto}(A)$.

On en déduit que $\dim E_0(A) + \dim E_{+toto}(A) + \dim E_{-toto}(A) = n - 2 + 1 + 1$ est égale à la taille de la matrice A, donc cette matrice est diagonalisable.

2. Méthode 2 (avec polynôme caractéristique) — Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & x & -a_{n-1} \\ -a_1 & \cdots & -a_{n-1} & x \end{vmatrix} = x^n - x^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$$ en développant suivant la dernière ligne. On factorise :

$\det(xI_n - A) = x^{n-2}(x - toto)(x + toto)$, où $toto = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2} \neq 0$ car les réels a_i ne sont pas tous nuls, par hypothèse.

D'où $\mathrm{Sp}(A) = \{0, +toto, -toto\}$ et $\begin{cases} 1 \leq \dim E_0(A) \leq n-2 \\ 1 \leq \dim E_{+toto}(A) \leq 1 \\ 1 \leq \dim E_{-toto}(A) \leq 1 \end{cases}$

Or le rang de A est égal à 2 car les réels a_i ne sont pas tous nuls, par hypothèse. Doù le *sep* $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $n-2$ d'après le théorème du rang. Par suite la somme des dimensions des *sep* de la matrice A est égale à la taille de cette matrice. La matrice A est donc diagonalisable.

Exercice 3. Soit, pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1,0,0)$ la matrice identité, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$.

1. Montrer que l'ensemble F des matrices $M(a,b,c)$, où (a,b,c) parcourt $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.
2. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice J.

3. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de la matrice K.
4. Montrer qu'il existe une matrice P telle que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales. (C'est la même matrice P pour J et K.)
5. En déduire qu'il existe une matrice P telle que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P$ est diagonale. (Vous avez bien lu ? c'est la même matrice P pour tout (a, b, c).)
6. Quel est le spectre de la matrice $M(a, b, c)$?

Soit, pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}.$$

On note $I = M(1, 0, 0)$ la matrice identité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $N \in F \iff \exists (a,b,c)\mathbb{R}^3,\ N = M(a,b,c) = a \cdot I + b \cdot J + c \cdot K$, d'où $F = \mathrm{Vect}(I, J, K)$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   La famille (I, J, K) est une famille génératrice de F. Montrons que la famille (I, J, K) est aussi libre :

$$a \cdot I + b \cdot J + c \cdot K = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0.$$

   Donc (I, J, K) est une base de F.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\det(\lambda I - J) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -\lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$.

   D'où $\det(\lambda I - J) = \lambda(\lambda^2 - 2)$. Le spectre de la matrice J est donc $\mathrm{Sp}(J) = \{0, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ et

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \quad , \quad J \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \quad , \quad J \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\vec{w}}.$$

   Les sous-espaces propres de la matrice J sont donc $\mathrm{Ker}(J - 0I) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$, $\mathrm{Ker}(J - \sqrt{2}I) = \mathrm{Vect}(\vec{v})$ et $\mathrm{Ker}(J + \sqrt{2}I) = \mathrm{Vect}(\vec{w})$.

3.
$$K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \quad , \quad K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}\,'} \quad , \quad K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}\,'},$$

   d'où le spectre : $\mathrm{Sp}(K) = \{0, 2\}$ et les sous-espaces propres :

   $\mathrm{Ker}(K - 0I) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\mathrm{Ker}(K - 2I) = \mathrm{Vect}(\vec{v}\,', \vec{w}\,')$.

4. On remarque que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(K - 2I) = \mathrm{Vect}(\vec{v}\,', \vec{w}\,')$. En effet, $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(K - 2I)$ car $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}\,' + \vec{w}\,'$ et $\vec{w} \in \mathrm{Ker}(K - 2I)$ car $\vec{w} = \vec{w}\,' - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}\,'$. On choisit donc P égal à la matrice de passage de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ vers la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

   Avec cette matrice P,

$$P^{-1} \cdot J \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} \cdot K \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Avec la même matrice P, $P^{-1} \cdot M(a, b, c) \cdot P$ est diagonale car

$$P^{-1} \cdot M(a,b,c) \cdot P = P^{-1} \cdot (aI + bJ + cK) \cdot P = a \cdot P^{-1}IP + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP.$$

6. D'après la question précédente,

$$P^{-1} \cdot M(a,b,c) \cdot P = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a + b\sqrt{2} + 2c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + 2c \end{pmatrix}.$$

   Le spectre de la matrice $M(a, b, c)$ est donc $\{a, a + b\sqrt{2} + 2c, a - b\sqrt{2} + 2c\}$.