FEUILLE DE T.D. N° 6

Dénombrement & probabilités

Exercice 1 (Dénombrement).

Démontrer les formules suivantes :

1. $$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$
   (de deux manières : formule du binôme et dénombrement)
2. LA PETITE FORMULE
   $$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$
3. Calculer, de deux manières (en utilisant la « petite formule » ou en dérivant), $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. En déduire $\displaystyle\sum_{X\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} \mathrm{Card}(X)$
4. LA FORMULE DE VANDERMONDE
   $$\sum_{p=0}^{n} \binom{a}{p}\binom{b}{n-p} = \binom{a+b}{n} \text{ et, en particulier, } \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$$
   (de deux manières : développement de $(1+X)^{a+b}$ et dénombrement)
5. $$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$
   (de deux manières : télescope et dénombrement).

Exercice 2 (La formule d'inversion de Pascal).

1. Montrer que la matrice
   $$T = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & & & & \binom{n-1}{n-1} & 0 \\ \binom{n}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1,n+1}$$
   du triangle de Pascal définie par $T_{ij} = \binom{i}{j}$ pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $p \geq n$, on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$, en posant $S_{p,0} = 0$. Montrer que $n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{p,k}$ et en déduire que $S_{p,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} k^p$.
3. Un *dérangement* est, par définition, une permutation sans point fixe. On pose $D_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D_n le nombre de dérangements de l'ensemble $[\![1,n]\!]$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Étudier $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!}$.

Exercice 3 (Indépendance). Soient A et B deux événements et les probabilités

$$x = P(A\cap B), \quad y = P(A\cap \bar{B}), \quad z = P(\bar{A}\cap B), \quad t = P(\bar{A}\cap\bar{B}).$$

1. Calculer $x+y+z+t$.
2. Calculer $P(A\cap B) - P(A)\cdot P(B)$ en fonction de x, y, z et t.
   En déduire que : A et B sont indépendants si, et seulement si,
   $$P(A\cap B)\times P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(A\cap\bar{B})\times P(\bar{A}\cap B).$$
3. Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R},\ u\cdot(1-u) \leq \frac{1}{4}$.
   En déduire que : $|P(A\cap B) - P(A)\cdot P(B)| \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 4 (Équiprobabilité)**.** Soit $n \geq 3$. Les boules d'une urne sont numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules au hasard, l'une après l'autre, sans les remettre dans l'urne.

1. Quel est l'univers ?
2. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre et consécutivement ?
3. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre ?

Exercice 5 (Formule des probabilités totales & suite arithmético-géométrique)**.** On étudie le fonctionnement d'une machine à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, sachant que :

— si elle marche à l'instant n, elle tombe en panne à l'instant $n+1$ avec une probabilité a ;

— si elle est en panne à l'instant n, elle est encore en panne à l'instant $n+1$ avec une probabilité b.

On suppose que $|b-a| \neq 1$ et on note u_n la probabilité que la machine marche à l'instant n.

1. Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer u_n en fonction de n, de u_0, de b et de a.
3. Etudier la limite de la suite (u_n).

Exercice 6 (Formule des probabilités totales & matrice stochastique)**.**

Un mobile se déplace sur un triangle ABC. À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, la position du mobile est A (avec la probabilité a_n), B (avec la probabilité b_n), ou C (avec la probabilité c_n). Entre deux instants n et $n+1$, le mobile change de position et se dirige de manière équiprobable vers une des deux autres positions. On suppose que, à l'instant 0, le mobile est situé à un sommet.

Exprimer matriciellement $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ en fonction de (a_n, b_n, c_n). Étudier les limites de a_n, b_n et c_n quand n tend vers l'infini. Dépendent-elles de la position initiale du mobile ? ▷ **exo 8 du TD 4**

Exercice 7 (Formule de Bayes)**.** Une boîte contient des dés à 6 faces : une proportion $1-p \neq 0$ de dés honnêtes et une proportion $p \neq 0$ de dés malhonnêtes. Quand on lance un dé malhonnête, la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{2}$.

1. On prend un dé au hasard dans la boîte et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On prend un dé au hasard dans la boîte, on le lance et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit malhonnête ?
3. On prend un dé au hasard dans la boîte, on le lance n fois et on obtient un 6 à chaque lancer. Quelle est la probabilité u_n que le dé soit malhonnête ?
4. Etudier la limite de la suite (u_n).

Exercice 8 (Formule des probabilités composées – *Oral Mines Ponts PC 2016*)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires.

1. On tire deux boules de l'urne simultanément.

   Soit S_1 l'événement : « On tire une boule blanche et une boule noire de l'urne ». Déterminer, en fonction de n, la probabilité de S_1.
2. On tire toutes les boules de l'urne (sans remise), deux par deux.

   Montrer que la probabilité d'obtenir, à chaque tirage, une boule blanche et une boule noire vaut $\dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 9 (Loi du 0-1 de Borel – *Oral Mines Ponts PC 2019*)**.**

On lance indéfiniment un dé équilibré.

1. Soit A_n l'événement « aucun 6 n'a été obtenu lors des n premiers lancers ». Déterminer $P(A_n)$.
2. Soit F_k l'événement « le premier 6 est obtenu au k-ième lancer ». Déterminer $P(F_k)$.
3. Soit K l'événement « 6 n'apparaît jamais ». Exprimer K à l'aide des A_n. En déduire $P(K)$.
4. Exprimer K en fonction des F_k. Retrouver la valeur de $P(K)$.
5. Soient G l'événement « 6 apparaît une infinité de fois » et H l'événement « 6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre eux ». Calculer $P(G)$ et $P(H)$.

Et aussi : les exercices 101,105,107,112 de la banque CCINP & l'exercice 1 du DS n° 4 MPI 2024-2025.