

C O L L E N° 0 8

Réduction & suites de fonctions

Exercice 1 (Diagonaliser la transposée). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que : si une matrice $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est inversible, alors sa transposée P^T l'est aussi. Exprimer alors $(P^T)^{-1}$ en fonction de P^{-1} .
2. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ et sa transposée ont le même spectre.

On suppose désormais que la matrice A est diagonalisable.

3. Montrer que A^T est diagonalisable et comparer les dimensions des *sep* de A et de A^T .
4. Soit P une matrice inversible telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note C_j la j -ième colonne de la matrice P et $X_j = (P^T)^{-1} \cdot P^{-1} \cdot C_j$.

Montrer que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad X_j^T \cdot C_i = \delta_{ij}$.

5. En déduire que : $A = \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j \cdot X_j^T$.
6. Calculer $A^T \cdot X_i$ et conclure.

Exercice 2 (Convergence dominée).

1. (a) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$ est convergente.
(b) Etudier la limite de la suite (u_n) .
2. (a) Montrer que l'intégrale impropre $A = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ est convergente.
(b) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$: $nu_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}} dt$.
(c) En déduire que : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{n}$.
3. (a) Etudier la limite de la suite $v_n = \int_0^1 e^{-x^n} dx$.
(b) Soit, plus généralement, une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Etudier la limite, quand n tend vers l'infini, de $\int_0^1 f(x^n) dx$.