FEUILLE DE T.D. N° 7

Séries de fonctions

Exercice 1. Soient l'intervalle $I =]1, +\infty[$ et, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ et chaque $x \in I$,

$$f_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(k \cdot x)}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur I.
2. Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et chaque $x \in I$,

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad , \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

   Montrer que la fonction S est continue sur I.
3. Étudier, de deux manières (en utiisant le théorème des séries alternées ou en utilisant le théorème de la double limite), $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.
4. Montrer que la fonction S est dérivable sur I. La fonction S est-elle (strictement) (dé)croissante sur I ?

Exercice 2. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge sur $\mathbb{R}$: normalement ? uniformément ? simplement ?
2. Soit $x \neq 0$. Montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + x^2}\, dt \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 + x^2}\, dt$$

   sont convergentes et les calculer (en prenant garde au signe de x).
3. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

   Montrer que $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$.
4. Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(x + n)}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Etudier $\sup\limits_{[0,+\infty[} |f_n|$. La convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est-elle normale sur $[0, +\infty[$?
3. Soit, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que la fonction S est croissante sur $[0, +\infty[$.
5. Soient un entier $n \geq 1$ et un réel $a \geq n$. Montrer que $S(a) \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.
6. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$ ▷ **trois méthodes dans le corrigé**.
7. Montrer que $S(x) = \underset{+\infty}{o}(x)$.
8. En utilisant le théorème de la double limite, montrer que la convergence de la série $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4 (tiré de CCP Maths 1 MP 2015)**.**

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} - 2\mathrm{e}^{-2nx}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: montrer que la fonction f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$.

2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

 Calculer, pour chaque réel x strictement positif, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

 Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} S(x)\,dx$ est convergente et la calculer.
3. En déduire, sans aucun calcul, la nature de la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx$.

Exercice 5. Soient une suite numérique $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum c_n$ converge absolument et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto c_n \frac{t^n}{n!}.$$

1. Soit un réel $a > 0$. Montrer que la série numérique $\sum \frac{a^n}{n!}$ est convergente et en déduire que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a,+a]$.
2. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente et la calculer.
4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente et qu'elle est égale à $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ▷ **théorème 16**.

Exercice 6 (La fonction zêta de Riemann)**.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{n^x}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle $I =]1,+\infty[$.
2. Soit $a > 1$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.
3. Calculer $\sup_{x\in I} |f_n(x)|$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas normale sur l'intervalle I.
4. En utilisant le théorème de la double limite, montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur l'intervalle I.
5. Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est définie et continue sur I.
6. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que, pour tout $x \in I$, $\zeta'(x) = -\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$.
7. En utilisant le théorème de la double limite, montrer que $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$ ▷ **exo 7 du TD 1**.

Exercice 7 (théorème de la convergence dominée)**.** Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle $]0,1[$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in]0,1[$, on note

$$f_n(t) = (-1)^n t^n f(t) \qquad \text{et} \qquad S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t).$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,1[,\ |S_n(t)| \leq |f(t)|$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

Et aussi : les exercices 8,16,17,49,53 de la banque CCINP & les exercices 2 et 4 du DS nº 4 MPI* 2024-2025.