Corrigé du T.D. n° 6

Dénombrement & probabilités

20 novembre 2025

Exercice 1 (Dénombrement).

Démontrer les formules suivantes :

1. $$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

   (de deux manières : formule du binôme et dénombrement)

2. La petite formule
$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

3. Calculer, de deux manières (en utilisant la « petite formule » ou en dérivant), $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. En déduire
$$\sum_{X\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)} \mathrm{Card}(X)$$

4. La formule de Vandermonde
$$\sum_{p=0}^{n} \binom{a}{p}\binom{b}{n-p} = \binom{a+b}{n} \text{ et, en particulier, } \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$$

   (de deux manières : développement de $(1+X)^{a+b}$ et dénombrement)

5. $$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

   (de deux manières : télescope et dénombrement).

---

1. Il y a 2^n parties de $\llbracket 1, n\rrbracket$. En construire une, c'est :
   - choisir son cardinal p ;
   - choisir ses p éléments parmi n.

   Donc $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

   Autre méthode : $2^n = (1+1^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^p 1^{n-p}$.

2. $p\binom{n}{p} = p\dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = n\binom{n-1}{p-1}$.

3. En utilisant la « petite formule » $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} & = & n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\ & = & n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \\ & = & n2^{n-1}. \end{array}$$

   Ou en dérivant, par rapport à x, la formule $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, si $x = 1$, alors : $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k$.

$$\begin{array}{rcl} \sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}X & = & \sum_{k=0}^{n}\sum_{X\in\mathcal{P}(E),\ \mathrm{Card}X=k} \mathrm{Card}X \\ & = & \sum_{k=0}^{n}\sum_{X\in\mathcal{P}(E),\ \mathrm{Card}X=k} k \\ & = & \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \\ & = & n2^{n-1}. \end{array}$$

4. Choisir n éléments parmi $a+b$, c'est :
   — en choisir k parmi a ;
   — puis choisir les $n-k$ autres parmi b.

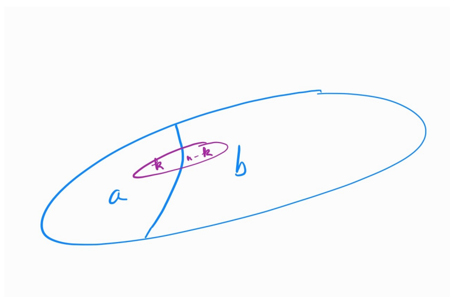

Figure 1 – La formule de Vandermonde

5. Par un télescope en utilisant le triangle de Pascal.

   Ou par le dénombrement. Choisir $p+1$ éléments parmi $n+1$, c'est :
   — choisir le plus grand d'entre eux, disons $k+1$ (où $k \in [\![p, n]\!]$) ;
   — puis choisir les p autres éléments parmi les k plus petits (il y a $\binom{k}{p}$ manières).

   Donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Exercice 2 (La formule d'inversion de Pascal)**.**

1. Montrer que la matrice

$$T = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & & & & \binom{n-1}{n-1} & 0 \\ \binom{n}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1,n+1}$$

   du triangle de Pascal définie par $T_{ij} = \binom{i}{j}$ pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $p \geq n$, on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$, en posant $S_{p,0} = 0$. Montrer que $n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{p,k}$ et en déduire que $S_{p,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p$.

3. Un *dérangement* est, par définition, une permutation sans point fixe. On pose $D_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D_n le nombre de dérangements de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Étudier $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!}$.

---

1. Première rédac :

La matrice T est triangulaire et ses éléments diagonaux valent $\binom{p}{p} = 1$. Son déterminant vaut donc 1. Il est non nul, la matrice T est donc inversible. D'après les $n+1$ formules du binôme de Newton, $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{i}{j} x^j = (1+x)^i, \quad \text{d'où} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & & & & \binom{n-1}{n-1} & 0 \\ \binom{n}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ x^n \end{pmatrix}}_{V(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1+x \\ (1+x)^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ (1+x)^{n-1} \\ (1+x)^n \end{pmatrix}}_{V(x+1)} \quad \text{et}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{i}{j} (1+x)^j (-1)^{i-j} = (1+x-1)^i = x^i, \quad \text{d'où}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (-1)^0\binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ (-1)^1\binom{1}{0} & (-1)^0\binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1}\binom{n-1}{0} & & & & (-1)^0\binom{n-1}{n-1} & 0 \\ (-1)^n\binom{n}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (-1)^0\binom{n}{n} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1+x \\ (1+x)^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ (1+x)^{n-1} \\ (1+x)^n \end{pmatrix}}_{V(x+1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ x^n \end{pmatrix}}_{V(x)}.$$

On tire de la première équation que $V(x) = T^{-1} \cdot V(x+1)$. Et de la seconde équation que $U \cdot V(x+1) = V(x)$. D'où $U \cdot V(x+1) = T^{-1} \cdot V(x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, en choisissant $n+1$ réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ distincts deux à deux :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad U \cdot V(a_i) = T^{-1} \cdot V(a_i).$$

Or les $n+1$ vecteurs colonnes $V(a_i)$ forment une base de $\mathscr{M}_{n+1,1}$ (car leur déterminant est un déterminant de Vandermonde non nul), donc $\boxed{U = T^{-1}}$

Seconde rédac :

La matrice $T = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} (X+1)^n & (X+1)^{n-1} & \cdots & \cdots & (X+1) & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} X^n \\ X^{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ X \\ 1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & & & & \binom{n-1}{n-1} & 0 \\ \binom{n}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \end{array}$ est la matrice de passage de la vieille base $(X^n, X^{n-1}, \cdots, X, 1)$ de l'*ev* $\mathbb{R}_n[X]$ vers la nouvelle base $((X+1)^n, (X+1)^{n-1}, \cdots, X+1, 1)$. Elle est donc inversible et son inverse est la matrice de passage de la nouvelle base vers la vieille base :

$$T^{-1} = \begin{array}{c} \\ (X+1)^n \\ (X+1)^{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ X+1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} X^n & X^{n-1} & \cdots & \cdots & X & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-1)^0\binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ (-1)^1\binom{1}{0} & (-1)^0\binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1}\binom{n-1}{0} & & & & (-1)^0\binom{n-1}{n-1} & 0 \\ (-1)^n\binom{n}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (-1)^0\binom{n}{n} \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Il y a n^p applications f de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$. En construire une, c'est :
   — choisir le cardinal k de $\mathrm{Im}(f)$, *i.e.* le nombre k d'éléments atteints dans $[\![1,n]\!]$;
   — choisir les k éléments atteints dans $[\![1,n]\!]$ (il y a $\binom{n}{k}$ manières) ;
   — construire une surjection de $[\![1,p]\!]$ vers les k éléments choisis (il y a $S_{p,k}$ manières).

   Donc $n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{p,k}$. Donc, d'après la formule d'inversion de Pascal, $S_{p,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p$.
3. Il y a $n!$ permutations de $[\![1,n]\!]$. En construire une, c'est :
   — choisir le nombre k d'éléments dérangés $[\![1,n]\!]$;
   — choisir les k éléments dérangés dans $[\![1,n]\!]$ (il y a $\binom{n}{k}$ manières) ;
   — construire une dérangement de $[\![1,k]\!]$ (il y a D_k manières).

   Donc $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$. Donc, d'après la formule d'inversion de Pascal, $D_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(n-k)!}k! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n!\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{p!}$ grâce au changement d'indice $p = n-k$.

   Donc $\dfrac{D_n}{n!} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{p!} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}$. Il y a donc environ un tiers des permutations qui sont des dérangements.

Exercice 3 (Indépendance)**.** Soient A et B deux événements et les probabilités

$$x = P(A\cap B), \quad y = P(A\cap\bar{B}), \quad z = P(\bar{A}\cap B), \quad t = P(\bar{A}\cap\bar{B}).$$

1. Calculer $x+y+z+t$.
2. Calculer $P(A\cap B) - P(A)\cdot P(B)$ en fonction de x, y, z et t.

   En déduire que : A et B sont indépendants si, et seulement si,

   $$P(A\cap B)\times P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(A\cap\bar{B})\times P(\bar{A}\cap B).$$
3. Montrer que : $\forall u\in\mathbb{R}, \quad u\cdot(1-u)\leq\frac{1}{4}$.

   En déduire que : $|P(A\cap B) - P(A)\cdot P(B)| \leq \frac{1}{4}$.

---

1. $(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B}) = A$ et cette union est disjointe, d'où : $x+y = P(A)$. De même $z+t = P(\bar{A})$. Or $A\cup\bar{A} = \Omega$ et cette union est disjointe, d'où $P(A)+P(\bar{A}) = P(\Omega)$, donc $x+y+z+t = 1$.
2. Les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$.

   Or $P(A\cap B) - P(A)\cdot P(B) = x-(x+y)(x+z) = x(x+y+z+t)-(x+y)(x+z) = xt-yz$.

   Donc A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A\cap B)\times P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(A\cap\bar{B})\times P(\bar{A}\cap B)$.
3. Pour tout u réel, $\frac{1}{4}-u\cdot(1-u) = u^2-u+\frac{1}{4} = \left(u-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, donc : $\forall u\in\mathbb{R}, \quad u\cdot(1-u)\leq\frac{1}{4}$.

   On veut montrer que : $-\frac{1}{4}\leq P(A\cap B)-P(A)\cdot P(B)\leq +\frac{1}{4}$.

   D'une part,

   $$\begin{aligned} P(A\cap B)-P(A)\cdot P(B) &= x-(x+y)(x+z) \quad \text{d'après 1} \\ &= x-x^2-(xz+yx+yz) \\ &\leq x-x^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \quad \text{d'après 3.} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} P(A)\cdot P(B)-P(A\cap B) &= yz-xt \quad \text{d'après } 1 \\ &= y(x+y+z+t)-(y+x)(y+t) \\ &\leq y-y^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \quad \text{d'après } 3. \end{aligned}$$

Exercice 4 (Équiprobabilité)**.** Soit $n \geq 3$. Les boules d'une urne sont numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules au hasard, l'une après l'autre, sans les remettre dans l'urne.

1. Quel est l'univers ?
2. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre et consécutivement ?
3. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre ?

---

1. Le tirage se fait *sans remise*, un résultat est donc une liste *sans répétition* $(u_1, \cdots, u_n)$, où u_i est le numéro de la i−ème boule tirée. Mieux : un résultat est une permutation de $[\![1,n]\!]$. L'univers Ω est donc le groupe S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$. Dans cet univers, il y a équiprobabilité, donc la probabilté d'un événement A est
$$P(A) = \frac{\text{nbre de résultats favorables à } A}{\text{nombre de résultats possibles}} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$
De plus $\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{Card}(S_n) = n!$.
2. Réaliser l'événement A : « les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre et consécutivement », c'est :
   — choisir à quel moment on tire le n° 1 (il y a $n-2$ manières car il faut laisser de la place pour tirer ensuite le n° 2 et le n° 3) ;
   — tirer juste après le n° 2 puis le n° 3 (il y a une manière) ;
   — placer les $n-3$ autres boules aux $n-3$ autres places (il y a $(n-3)!$ manières).

   Donc $\mathrm{Card}(A) = (n-2)\times 1 \times (n-3)! = (n-2)!$ et $P(A) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$. (Remarque : dans le cas où $n=3$, on trouve bien $\frac{1}{6}$.)
3. Réaliser l'événement B : « les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre », c'est :
   — choisir les moments où seront tirés les numéros 1, 2 et 3 (il y a $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ manières) ;
   — y placer les numéros 1, 2 et 3 dans cet ordre (il y a une manière) ;
   — placer les $n-3$ autres boules aux $n-3$ autres places (il y a $(n-3)!$ manières).

   Donc $\mathrm{Card}(B) = \dfrac{n!(n-3)!}{3!(n-3)!} = \dfrac{n!}{6}$ et $P(B) = \dfrac{n!}{n!6} = \dfrac{1}{6}$.

Exercice 5 (Formule des probabilités totales & suite arithmético-géométrique)**.** On étudie le fonctionnement d'une machine à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, sachant que :

— si elle marche à l'instant n, elle tombe en panne à l'instant $n+1$ avec une probabilité a ;
— si elle est en panne à l'instant n, elle est encore en panne à l'instant $n+1$ avec une probabilité b.

On suppose que $|b-a| \neq 1$ et on note u_n la probabilité que la machine marche à l'instant n.

1. Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer u_n en fonction de n, de u_0, de b et de a.
3. Etudier la limite de la suite (u_n).

---

1. Soit M_n l'événement « La machine marche à l'instant n ». Les événements M_n et $\overline{M_n}$ ont une union disjointe et certaine, d'où :
$$P(M_{n+1}) = P(M_n)\cdot P_{M_n}(M_{n+1}) + P(\overline{M_n})\cdot P_{\overline{M_n}}(M_{n+1}).$$
Or $P(M_{n+1}) = u_{n+1}$, $P(M_n) = u_n$, $P(\overline{M_n}) = 1-u_n$ et $\begin{cases} P_{M_n}(M_{n+1}) = 1 - P_{M_n}(\overline{M_{n+1}}) = 1-a \\ P_{\overline{M_n}}(M_{n+1}) = 1 - P_{\overline{M_n}}(\overline{M_{n+1}}) = 1-b \end{cases}$. D'où $u_{n+1} = u_n(1-a) + (1-u_n)(1-b)$. Donc $u_{n+1} = (b-a)u_n + (1-b)$. $(*)$

2. La relation de récurrence $(*)$ est arithmético-géométrique, on la résout en cherchant un point fixe ℓ :

$$\ell = (b-a)\ell + (1-b) \iff \ell = \frac{1-b}{1-b+a}$$

car $a - b \neq -1$ par hypothèse. D'où :

$$(*) \iff u_{n+1} - \ell = (b-a)(u_n - \ell) \iff u_n - \ell = (b-a)^n(u_0 - \ell) \iff u_n = (b-a)^n(u_0 - \ell) + \ell.$$

3. $\begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \\ 0 \leq b \leq 1 \end{cases}$, d'où $0 - 1 \leq a - b \leq 1 - 0$, d'où $|a-b| \leq 1$. De plus $|b-a| \neq 1$ par hypothèse, donc $|b-a| < 1$ et $(b-a)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 6 (Formule des probabilités totales & matrice stochastique)**.** Un mobile se déplace sur un triangle ABC. À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, la position du mobile est A (avec la probabilité a_n), B (avec la probabilité b_n), ou C (avec la probabilité c_n). Entre deux instants n et $n+1$, le mobile change de position et se dirige de manière équiprobable vers une des deux autres positions. On suppose que, à l'instant 0, le mobile est situé à un sommet.

Exprimer matriciellement $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ en fonction de (a_n, b_n, c_n). Étudier les limites de a_n, b_n et c_n quand n tend vers l'infini. Dépendent-elles de la position initiale du mobile ?

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les trois événements A_n « le mobile est en A à l'instant n », B_n « le mobile est en B à l'instant n » et C_n « le mobile est en C à l'instant n » ont une union certaine et disjointe, d'où (formule des probabilités totales) : $P(A_{n+1}) = P(A_n) \cdot P(A_{n+1}|A_n) + P(B_n) \cdot P(A_{n+1}|B_n) + P(C_n) \cdot P(A_{n+1}|C_n)$ et, de même pour $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$. D'où

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}}_{X_n}, \quad \text{donc, par récurrence,} \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer M^n, on essaie de diagonaliser la matrice M :

$$M\varepsilon_1 = 1\varepsilon_1,\ M\varepsilon_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_2 \text{ et } M\varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon_3, \text{avec } \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les trois vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3 sont propres et linéairement indépendants, donc la matrice M est diagonalisable :

$$P^{-1}MP = D, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où $X_n = M^n X_0 \iff X'_n = D^n X'_0$, en notant $X_n = PX'_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Or $D^n X'_0 = \begin{pmatrix} a'_0 \\ b'_0/(-2)^n \\ c'_0/(-2)^n \end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a'_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où $X_n = PX'_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_0 \\ a'_0 \end{pmatrix}$. D'où les suites a_n, b_n et c_n convergent vers une même limite a'_0. De plus, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n + c_n = 1$ car les événements A_n, B_n et C_n ont une union disjointe et certaine. D'où $\lim a_n + \lim b_n + \lim c_n = 1$, d'où $a'_0 = \frac{1}{3}$. Donc la limite des suites a_n, b_n et c_n vaut $\frac{1}{3}$, indépendamment de la position initiale du mobile.

Exercice 7 (Formule de Bayes)**.** Une boîte contient des dés à 6 faces : une proportion $1 - p \neq 0$ de dés honnêtes et une proportion $p \neq 0$ de dés malhonnêtes. Quand on lance un dé malhonnête, la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{2}$.

1. On prend un dé au hasard dans la boîte et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On prend un dé au hasard dans la boîte, on le lance et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit malhonnête ?
3. On prend un dé au hasard dans la boîte, on le lance n fois et on obtient un 6 à chaque lancer. Quelle est la probabilité u_n que le dé soit malhonnête ?
4. Etudier la limite de la suite (u_n).

---

1. Soient les événements H : « le dé est honnête » et S : « on obtient un six ». Les événements H et $\overline{H}$ ont une union disjointe et certaine, d'où (formule des probabilités totales) :

$$P(S) = P(H) \cdot P(S|H) + P(\overline{H}) \cdot P(S|\overline{H}) = (1-p) \times \frac{1}{6} + p \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}p + \frac{1}{6}.$$

2. D'après la formule de Bayes, $P(S) \cdot P(\bar{H}|S) = P(\bar{H}) \cdot P(S|\bar{H})$. D'où $P(\bar{H}|S) = \dfrac{P(\bar{H}) \cdot P(S|\bar{H})}{P(S)} = \dfrac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{3}p + \frac{1}{6}}$.

3. Soit l'événement S_n : « on obtient n six ».

   $u_n = P(\bar{H}|S_n) = \dfrac{P(S_n|\bar{H}) \cdot P(\bar{H})}{P(S_n)}$ car, d'après la formule de Bayes, $P(S_n|\bar{H}) \cdot P(\bar{H}) = P(\bar{H}|S_n) \cdot P(S_n)$.

   D'une part, $P(S_n|\bar{H}) \cdot P(\bar{H}) = \frac{1}{2^n} \cdot p$. D'autre part, les événements H et $\bar{H}$ ont une union disjointe et certaine, d'où (formule des probabilités totales) : $P(S_n) = P(H) \cdot P(S_n|H) + P(\bar{H}) \cdot P(S_n|\bar{H}) = (1-p) \cdot \frac{1}{6^n} + p \cdot \frac{1}{2^n}$.

   Donc $u_n = \dfrac{\frac{1}{2^n} \cdot p}{(1-p) \cdot \frac{1}{6^n} + p \cdot \frac{1}{2^n}}$.

4. $u_n = \dfrac{\frac{1}{2^n} \cdot p}{\frac{1}{2^n} \cdot p} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{3^n p} - \frac{1}{3^n} + 1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 8 (Formule des probabilités composées – *Oral Mines Ponts PC 2016*)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires.

1. On tire deux boules de l'urne simultanément.

   Soit S_1 l'événement : « On tire une boule blanche et une boule noire de l'urne ». Déterminer, en fonction de n, la probabilité de S_1.

2. On tire toutes les boules de l'urne (sans remise), deux par deux.

   Montrer que la probabilité d'obtenir, à chaque tirage, une boule blanche et une boule noire vaut $\dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}$.

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons S_i l'événement « le i-ième tirage donne une boule blanche et une boule noire » et A l'événement dont on cherche la probabilité. On a

$$A = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \quad (n \text{ succès}).$$

La formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(S_1) \times \mathbb{P}_{S_1}(S_2) \times \mathbb{P}_{S_1 \cap S_2}(S_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{S_1 \cap \cdots \cap S_{n-1}}(S_n). \tag{1}$$

Chacun des n facteurs est la probabilité p_k de tirer une boule blanche et une boule noire quand on tire simultanément 2 boules dans une urne contenant k boules blanches et k boules noires (avec k variant de n à 1).

Lorsque l'urne contient $2k$ boules (k blanches et k noires) cette probabilité est (par équiprobabilité) :

$$p_k = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \frac{k^2}{\binom{2k}{2}} = \frac{k^2}{\frac{2k(2k-1)}{2}} = \frac{k}{2k-1}.$$

On peut retrouver cette probabilité p_k en considérant qu'on tire 2 boules sans remise et alors $p_k = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \frac{k}{2k} \times \frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k} \times \frac{k}{2k-1} = \frac{k}{2k-1}$. En reprenant (1), il vient alors :

$$\mathbb{P}(A) = p_n \times p_{n-1} \times \cdots \times p_1 = \frac{n}{2n-1} \times \frac{n-1}{2n-3} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

Exercice 9 (Loi du 0-1 de Borel, oral Mines Ponts PC 2019)**.** On lance indéfiniment un dé équilibré.

1. Soit A_n l'événement « aucun 6 n'a été obtenu lors des n premiers lancers ». Déterminer $P(A_n)$.
2. Soit F_k l'événement « le premier 6 est obtenu au k-ième lancer ». Déterminer $P(F_k)$.
3. Soit K l'événement « 6 n'apparaît jamais ». Exprimer K à l'aide des A_n. En déduire $P(K)$.

4. Exprimer K en fonction des F_k. Retrouver la valeur de $P(K)$.
5. Soient G l'événement « 6 apparaît une infinité de fois » et H l'événement « 6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre eux ». Calculer $P(G)$ et $P(H)$.

On note B_i l'événement « Au $i$ème lancer on a un 6 ».

1. Les lancers sont indépendants : $P(A_n) = P(\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_n}) = P(\overline{B_1}) \dots P(\overline{B_n}) = (\frac{5}{6})^n$.
2. On obtient, en invoquant l'indépendance des lancers ou la loi géométrique :
$$P(F_k) = P(A_{k-1} \cap B_k) = P(A_{k-1})P(B_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$
3. On trouve $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, et les (A_n) formant une suite décroissante. Par le théorème de continuité décroissante
$$P(K) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0.$$
4. On a aussi $K = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{F_k} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k}$. La réunion étant disjointe, $P(\cup_{k=1}^{+\infty} F_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(F_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{5}{6})^{k-1} \frac{1}{6} = 1$. On retrouve la valeur
$$P(K) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = 0.$$
5. (a) Soit G l'événement « 6 apparaît une infinité de fois ». Son contraire est : « 6 apparaît un nombre fini de fois », ou encore « à partir d'un certain rang, on n'a plus de 6 », soit :
$$\overline{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{B_k}.$$
Si on note $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{B_k}$, les (C_n) forment une famille croissante. Par théorème de continuité croissante on a donc $P(\overline{G}) = P(\cup_{n=1}^{\infty} C_n) = \lim_{n \to +\infty} P(C_n)$. Mais pour tout N, $P(C_n) \leqslant P(\cap_{k=n}^{n} \overline{B_k}) = \prod_{k=n}^{n} P(\overline{B_k})$ par indépendance des lancers, donc $P(C_n) \leqslant (\frac{5}{6})^{N-n+1}$, donc $P(C_n) = 0$. Alors $P(\overline{G}) = 0$ donc $P(G) = 1$.

   (b) Soit H l'événement « 6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre eux », ou encore « à partir d'un certain rang, on n'a plus que des 6 », soit
$$H = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} B_k.$$
Si on pose $D_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} B_k$, les (D_n) forment une famille croissante. Par théorème de continuité croissante, on a donc $P(H) = P(\cup_{n=1}^{\infty} D_n) = \lim_{n \to \infty} P(D_n)$. Mais pour tout N, $P(D_n) \leqslant P(\cap_{k=n}^{n} B_k) = \prod_{k=n}^{n} P(B_k)$ par indépendance des lancers, donc $P(D_n) \leqslant (\frac{1}{6})^{N-n+1}$, donc $P(D_n) = 0$. Finalement,
$$P(H) = 0.$$