

CORRIGÉ DE LA COLLE N° 08

Réduction & suites de fonctions

21 novembre 2025

Exercice 1 (Diagonaliser la transposée). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que : si une matrice $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est inversible, alors sa transposée P^T l'est aussi. Exprimer alors $(P^T)^{-1}$ en fonction de P^{-1} .
2. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ et sa transposée ont le même spectre.

On suppose désormais que la matrice A est diagonalisable.

3. Montrer que A^T est diagonalisable et comparer les dimensions des *sep* de A et de A^T .
4. Soit P une matrice inversible telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note C_j la j -ième colonne de la matrice P et $X_j = (P^T)^{-1} \cdot P^{-1} \cdot C_j$.

Montrer que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad X_j^T \cdot C_i = \delta_{ij}$.

5. En déduire que : $A = \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j \cdot X_j^T$.
6. Calculer $A^T \cdot X_i$ et conclure.

1. En transposant $P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = I_n$, on obtient : $(P^{-1})^T \cdot P^T = P^T \cdot (P^{-1})^T = I_n$, donc P^T est inversible et son inverse $(P^T)^{-1}$ est $(P^{-1})^T$.
2. Soit $x \in \mathbb{K} : (xI_n - A)^T = xI_n - A^T$ or une matrice et sa transposée ont le même déterminant, d'où $\chi_A(x) = \chi_{A^T}(x)$, or les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, donc $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A^T)$.
3. En transposant $D = P^{-1}AP$, on obtient : $D^T = P^T A^T (P^{-1})^T$. Or $D^T = D$ car D est diagonale et $P^T A^T (P^T)^{-1}$ car $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$. D'où $D = P^T A^T (P^T)^{-1}$. Donc A^T est diagonalisable. De plus, A et A^T ont les mêmes valeurs propres car celles-ci sont les éléments diagonaux de la même matrice D . Enfin, les *sep* de A et de A^T ont les mêmes dimensions car la dimension de $\text{SEP}(\lambda)$ est égale au nombre de fois que λ apparaît sur la diagonale de D .
4. Le vecteur colonne $P^{-1}C_j$ est égal à E_j , le j -ième vecteur colonne de la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. D'où $X_j^T \cdot C_i = [(P^T)^{-1} \cdot P^{-1} \cdot C_j]^T C_i = E_j^T \cdot E_i = \delta_{ij}$.

5. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'une part, $AC_i = \lambda_i C_i$ par définition. D'autre part, $\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j X_j^T \right) C_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j \delta_{ij} = \lambda_i C_i$. Or les vecteurs C_i forment une base de l'ev $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Donc $A = \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j X_j^T$.

6. $A^T = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j C_j^T$. D'où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A^T \cdot X_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j C_j^T X_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \delta_{ij} = \lambda_i X_i$. Les n vecteurs colonnes X_i sont donc des vecteurs propres de la matrice A^T .

Par ailleurs, ces n vecteurs sont libres car ce sont les images, par la matrice inversible $(P^T)^{-1} \cdot P^{-1}$, des vecteurs C_j qui sont libres. Ils forment donc une base de l'ev $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

La famille $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est donc une base de l'ev $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de la matrice A^T .

Exercice 2.

- Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$ est convergente.
 - Etudier la limite de la suite (u_n) .
- Montrer que l'intégrale impropre $A = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ est convergente.
 - Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$: $nu_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}} dt$.
 - En déduire que : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{n}$.
- Etudier la limite de la suite $v_n = \int_0^1 e^{-x^n} dx$.
 - Soit, plus généralement, une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Etudier la limite, quand n tend vers l'infini, de $\int_0^1 f(x^n) dx$.

- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1, +\infty[$, on pose $f_n(x) = e^{-x^n}$.

 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$. Or $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ est convergente. Donc l'intégrale u_n est une intégrale convergente.
 - On utilise le théorème de la convergence dominée : $\forall x \in [1, +\infty[$, $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ (indépendant de n) et $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ est convergente. Or $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 1/e & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. La fonction f est continue et $\int_1^{+\infty} f(x) dx = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

SECONDE MÉTHODE (en ouvrant l'intervalle en 1) : $\forall x \in]1, +\infty[$, $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ (indépendant de n) et $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ est convergente. Or $\forall x > 1$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$. La fonction f est continue par morceaux et $\int_1^{+\infty} f(x) dx = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

- Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \leq \frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ est convergente. Donc l'intégrale A aussi.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait le CDV $t = x^n$ ($dt = nx^{n-1} dx$). La fonction $x \mapsto x^n$ est strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$, d'où : $nu_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}} dt$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1, +\infty[$, on pose $g_n(t) = \frac{e^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}}$.
 - On utilise le théorème de la convergence dominée : $\forall t \in [1, +\infty[$, $|g_n(t)| \leq e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente. Or $g_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(t) = \frac{e^{-t}}{t} \text{ car } t^{1-\frac{1}{n}} = e^{(1-\frac{1}{n}) \ln t} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\ln t} = t$ par continuité de la fonction exp. D'où $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(t) dt$. D'où $\frac{u_n}{A/n} = \frac{nu_n}{A} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Donc $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{n}$.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = e^{-x^n}$. On utilise le théorème de la convergence dominée : $\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leq 1$ (fonction indépendante de n) et $\int_0^1 1 dx$ est convergente. Or $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 1/e & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$. La fonction f est continue par morceaux et $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$.

SECONDE MÉTHODE (en ouvrant l'intervalle en 1) : Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = e^{-x^n}$. On utilise le théorème de la convergence dominée : $\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leq 1$ (fonction indépendante de n) et $\int_0^1 1 dx$ est convergente. Or $\forall x \in [0, 1]$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = 1$. La fonction f est continue et $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$.

- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $g_n(x) = f(x^n)$. La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0, 1]$, elle est donc bornée. Soit M un majorant de $|f|$: $\forall x \in [0, 1]$, $|g_n(x)| \leq M$ (indépendant de n) et $\int_0^1 M dx$ est convergente. Or $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x) = \begin{cases} f(1) & \text{si } x = 1 \\ f(0) & \text{si } 0 \leq x < 1(*) \end{cases}$. La fonction g est continue par morceaux et $\int_0^1 g(x) dx = f(0)$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0)$ d'après le théorème de la convergence dominée
- (*) En effet, si $x \in [0, 1[$, alors : $n \rightarrow \infty \implies x^n \rightarrow 0 \implies f(x^n) \rightarrow f(0)$ car f est continue par hypothèse.