

CORRIGÉ DU KDO DU 24 / 11 / 2025

Probabilités

Cet exercice porte sur **la loi du zéro-un de Borel**.

▷ **L'exercice 9 du T.D. n° 6** en est un cas particulier.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Soit F l'ensemble des résultats $\omega \in \Omega$ tels que ω appartient à une infinité de E_n .

1. Montrer que $F = \bigcap_{n \geq 0} \left(\bigcup_{k \geq n} E_k \right)$.
2. L'ensemble F est-il un événement ?
3. Que peut-on dire de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des événements définis par $A_n = \bigcup_{k \geq n} E_k$?
4. On suppose que la série $\sum P(E_n)$ converge.

Montrer que $P(F) = 0$.

5. On suppose, dans cette question, que $(\overline{E_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'événements indépendants et que la série $\sum P(E_n)$ diverge.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $N \geq n$,

$$\ln \left(P \left(\bigcap_{p=n}^N \overline{E_p} \right) \right) \leq - \sum_{p=n}^N P(E_p).$$

(b) En déduire la limite, quand $N \rightarrow \infty$, de $P \left(\bigcap_{p=n}^N \overline{E_p} \right)$.

(c) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$P \left(\bigcap_{p \geq n} \overline{E_p} \right) = 0.$$

(d) Conclure que $P(F) = 1$.

1. Soit $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned}\omega \in F &\Leftrightarrow \omega \text{ appartient à une infinité de } E_k \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, \omega \in E_k \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in \bigcup_{k \geq n} E_k \\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} E_k\end{aligned}$$

2. F est une intersection dénombrable d'unions dénombrables d'événements. Les tribus sont stables par unions et intersections, finies ou dénombrables. Par conséquent, $F \in \mathcal{A}$, autrement dit : F est un événement.
3. $\bigcup_{k \geq n} E_k = (\bigcup_{k \geq n+1} E_k) \cup E_n$ d'où $\bigcup_{k \geq n+1} E_k \subset \bigcup_{k \geq n} E_k$

La suite (A_n) est donc une suite décroissante d'événements.

4. $F = \bigcap_{n \geq 0} A_n$ et la suite (A_n) est décroissante, d'où (par continuité décroissante) : $P(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

Et par σ -sous-additivité, pour chaque $n \in \mathbb{N}$: $P\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(E_k)$ car la série $\sum P(E_k)$ converge par hypothèse.

Donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq P(A_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(E_k)$.

Par hypothèse, la série $\sum P(E_n)$ est convergente. Par conséquent, la suite de ses restes converge vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} P(E_k) \right) = 0$$

On conclut, par le théorème des gendarmes, que : $P(A_n)$ tend vers 0. Donc $P(F) = 0$.

5. (a) Les événements $\overline{E}_p$ étant indépendants, on sait que, pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq N$:

$$P\left(\bigcap_{p=n}^N \overline{E}_p\right) = \prod_{p=n}^N P(\overline{E}_p).$$

On peut alors écrire :

$$\ln \left(P\left(\bigcap_{p=n}^N \overline{E}_p\right) \right) = \sum_{p=n}^N \ln(P(\overline{E}_p)) = \sum_{p=n}^N \ln(1 - P(E_p)) \leq - \sum_{p=n}^N P(E_p)$$

car $\ln(1+x) \leq x$ pour tout réel $x > -1$.

- (b) La série $\sum P(E_n)$ étant divergente, on sait qu'elle tend vers $+\infty$ (car tous les termes sont positifs). Par théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\ln \left(P\left(\bigcap_{p=n}^N \overline{E}_p\right) \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\infty \quad \text{d'où} \quad P\left(\bigcap_{p=n}^N \overline{E}_p\right) = \exp \left(\ln \left(P\left(\bigcap_{p=n}^N \overline{E}_p\right) \right) \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $N \geq n$, $\bigcap_{p \geq n} \overline{E}_p \subset \bigcap_{p=n}^N \overline{E}_p$. Par croissance de la probabilité, on en déduit que $0 \leq P\left(\bigcap_{p \geq n} \overline{E}_p\right) \leq P\left(\bigcap_{p=n}^N \overline{E}_p\right)$. Les inégalités larges passent à la limite $N \rightarrow \infty$, donc $P\left(\bigcap_{p \geq n} \overline{E}_p\right) = 0$.

- (d) Une union, finie ou dénombrable, d'événements presque impossibles est encore un événement presque impossible ▶ **corollaire 14**. Or $\overline{F} = \bigcup_{n \geq 0} \left(\bigcap_{p \geq n} \overline{E}_p \right)$ est une union dénombrable d'événements presque impossibles d'après la question précédente.

D'où $P(\overline{F}) = 0$. Donc $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1$.