Chapitre VIII Produits scalaires

Table des matières

VIII.1 Qu'est-ce qu'un produit scalaire ?

Définition 1
Soient un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E et une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \varphi(x,y)$. On dit que φ est une forme :

- $\boxed{\text{B}}$ *bilinéaire* si $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \forall z \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R},$

$$\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x,z) + \beta\varphi(y,z) \qquad \text{et} \qquad \varphi(z, \alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(z,x) + \beta\varphi(z,y)\ ;$$

- $\boxed{\text{S}}$ *symétrique* si $\forall x \in E,\ \forall y \in E, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$;
- $\boxed{\text{D}}$ *définie* si $\forall x \in E,\ [\varphi(x,x) = 0 \implies x = 0_E]$;
- $\boxed{\text{P}}$ *positive* si $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geq 0$.

Définition 2
Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Si $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, alors :

1. on dit que φ est **un produit scalaire**. Le produit scalaire $\varphi(x,y) \in \mathbb{R}$ de deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ est aussi noté $\langle x|y\rangle$, $\langle x,y\rangle$, $(x|y)$ ou $x \cdot y$.
2. le carré scalaire $\varphi(x,x) = \langle x|x\rangle$ est positif. Sa racine carrée est notée

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

et est appelée la **norme** (associée à ce produit scalaire) du vecteur x.

On peut définir des produits scalaires sur différents espaces vectoriels de dimension finie : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\cdots$ ou de dimension infinie : $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}([a,b])$, $\cdots$ Un $\mathbb{R}-ev$ muni d'un produit scalaire est appelé un espace **préhilbertien** ; un $\mathbb{R}-ev$ de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un espace **euclidien**.

Exemple 3 (Quelques produits scalaires, appelés canoniques) —

1. *L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ est un espace euclidien quand on le munit du produit scalaire*

$$\langle X,Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T \cdot Y \quad \textit{pour tous vecteurs } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \textit{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

La norme associée à ce produit scalaire est

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{X^T \cdot X}.$$

2. *L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de matrices $n \times n$ est un espace euclidien quand on le munit du produit scalaire*

$$\langle A, B\rangle = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{ij}b_{ij} = \operatorname{tr}(A^T \cdot B) \quad \textit{pour toutes matrices } A = (a_{ij}) \textit{ et } B = (b_{ij}).$$

La norme associée à ce produit scalaire est

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{ij}^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T \cdot A)}.$$

3. *L'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur un segment $[a,b]$ est un espace préhilbertien quand on le munit du produit scalaire* $< f, g >= \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$.

La norme associée à ce produit scalaire est $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}$.

Exercice 4 — *Soit I un intervalle. On note $L_2(I)$ l'ensemble des fonctions f continues par morceaux et de carré intégrable sur I, c'est-à-dire : l'intégrale $\int_I f^2(t)\,dt$ (qui est peut-être impropre) converge. Montrer que :*

1. *le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable ;*
2. *l'ensemble $L_2(I)$ est un espace vectoriel ;*
3. *l'ensemble $L_2(I) \cap \mathcal{C}(I)$ des fonctions continues et de carré intégrable sur I est aussi un ev ;*
4. $< f, g >= \displaystyle\int_I f(t)g(t)\,dt$ *est défini pour tous $f \in L_2(I)$ et $g \in L_2(I)$ et que c'est un produit scalaire sur $L_2(I) \cap \mathcal{C}(I)$ mais pas sur $L_2(I)$.*

On peut définir sur un même espace vectoriel plusieurs produits scalaires. Et, à chaque produit scalaire, est alors associé sa norme.

Exercice 5 — *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Montrer que*

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)\,dt \qquad \textit{et} \qquad \psi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

sont deux produits scalaires sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire la norme associée à chaque produit scalaire.

2. *Montrer que φ est encore un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, mais que ψ ne l'est plus.*

VIII.2 (In)égalités

Théorème 6 (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**)
Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E :

$$\boxed{\forall x \in E,\ \forall y \in E, \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$$

et il y a égalité si, et seulement si, les vecteurs x et y sont colinéaires.

Preuve —

— Si $y = 0_E$, l'inégalité est vraie. Sinon, soit :

$$f(\lambda) = < x + \lambda\, y, x + \lambda\, y > = \lambda^2 < y, y > + 2\lambda < x, y > + < x, x > \quad \text{car } \boxed{\text{B}} \text{ et } \boxed{\text{S}}.$$

Cette fonction f est un polynôme de degré 2 (car $< y, y >$ est strictement positif) et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geq 0$ car le produit scalaire est positif $\boxed{\text{P}}$. Le discriminant $\Delta = 4 < x, y >^2 - 4 < x, x >< y, y >$ du polynôme f est donc inférieur ou égal à zéro.

D'où $< x, y >^2 \leq < x, x >< y, y >$. Donc $| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}$.

— Si x et y sont colinéaires, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ y = \lambda\, x$ ou $x = \lambda\, y$. D'où $< x|y >^2 = \lambda^2 < x|x >^2 = < x|x >< y|y >$.

Réciproquement : ou bien $y = 0_E$, les vecteurs x et y sont alors colinéaires. Ou bien $y \neq 0_E$, le discriminant Δ du polynôme f est alors nul. D'où

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) = 0.$$

D'où $< x + \lambda\, y | x + \lambda\, y > = 0$. Or le produit scalaire est défini $\boxed{\text{D}}$, d'où $x + \lambda\, y = 0_E$. Donc x et y sont colinéaires.

□

Exemple 7 —

1. *Pour tous $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2}.$$

Preuve — *L'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. On l'applique aux deux vecteurs $(|x_1|, \cdots, |x_n|) \in \mathbb{R}^n$ et $(|y_1|, \cdots, |y_n|)$.* □

2. *Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a, b]$,*

$$\left| \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)\, g(t)|\ dt \leq \left(\int_a^b f^2(t)\, dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(t)\, dx \right)^{1/2}$$

Preuve — *L'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{C}\big([a, b]\big)$. On l'applique aux deux fonctions $|f|$ et $|g|$ qui sont bien continues sur $[a, b]$.* □

3. *Plus généralement,*

$$\boxed{\forall f \in L_2(I),\ \forall g \in L_2(I),\ \left| \int_I f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq \int_I |f(t)\, g(t)|\ dt \leq \left(\int_I f^2(t)\, dt \right)^{1/2} \left(\int_I g^2(t)\, dx \right)^{1/2}}$$

Preuve — *Le produit de deux fonctions de $L_2(I)$ est intégrable et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour le produit scalaire canonique de $L_2(I)$. (Sauf que : ce produit scalaire n'en est pas un car il est positif mais pas défini ; mais la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'utilise pas le caractère défini.) On l'applique aux deux fonctions $|f|$ et $|g|$ qui sont bien dans $L_2(I)$.* □

Corollaire 8

Soit $\langle\cdot|\cdot\rangle$ un produit scalaire sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E. La norme

$$\|\cdot\| \ :\ E \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

vérifie les trois propriétés :

1. $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0_E$;
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\, \|x\|$;
3. $\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Preuve —

1. $\|x\| = 0 \Longrightarrow < x|x > = 0 \Longrightarrow x = 0_E$ car le produit scalaire est défini $\boxed{\text{D}}$.
2. $< \lambda\, x|\lambda\, x > = \lambda < x|\lambda\, x > = \lambda^2 < x|x >$ car le produit scalaire est bilinéaire $\boxed{\text{B}}$.

   D'où $\|\lambda\, x\|^2 = \lambda^2\, \|x\|^2$. Donc $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$.

3.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= < x+y|x+y > \\ &= < x|x > + < y|y > +2 < x|y > \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x|y > \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| \qquad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

□

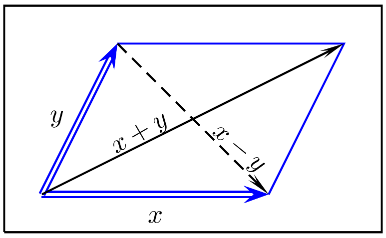
Remarque 9 — *En calculant*

$$(*) \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y\rangle \qquad \text{et} \qquad (**) \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x|y\rangle$$

puis la différence $(*) - (**)$ *et la somme* $(*) + (**)$*, on obtient les quatre égalités*

$$\begin{aligned} 2\langle x|y\rangle &= \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 && (1)\\ 2\langle x|y\rangle &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2 && (2)\\ 4\langle x|y\rangle &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 && (3)\\ 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 &= \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 && (4)\end{aligned}$$

Les trois premières sont les ***égalités de polarisation****, la quatrième est l'****égalité du parallélogramme*** *: la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des deux diagonales.*



VIII.3 Orthogonalité

Définition 10
Soit $\langle\cdot|\cdot\rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E. Soient $x \in E$ et $y \in E$ deux vecteurs. Soient A et B deux parties de E. On dit que :

1. x est orthogonal à y, et on note $x \perp y$, si
$$\langle x|y\rangle = 0\ ;$$
2. x est orthogonal à B, et on note $x \perp B$, si x est orthogonal à tout vecteur de B :
$$\forall y \in B,\ x \perp y\ ;$$
3. A est orthogonal à B, et on note $A \perp B$, si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B :
$$\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ x \perp y.$$

EXEMPLE 11 — *Soient l'espace vectoriel* $E = \mathcal{C}([-1,+1])$ *et le produit scalaire* $< f, g >= \int_{-1}^{+1} f(t)g(t)\,dt$.

1. *Les fonctions* $u \in E$ *et* $v \in E$ *définies par*
$$\forall x \in [-1,+1], \quad u(x) = 1 + x^2 \quad et \quad v(x) = 2 - 5x^2$$
sont orthogonales ($u \perp v$) *car* $< u, v >= \int_{-1}^{+1} (1+t^2)(2-5t^2)\,dt = 0$.
2. *Si* f *est une fonction paire et* g *est une fonction impaire, alors* $f \perp g$ *car*
$$\int_{-1}^{+1} f(t)g(t)\,dt = 0 \text{ car la fonction } fg \text{ est impaire.}$$
On en déduit que le sev I *des fonctions impaires de* E *est orthogonal au sev* P *des fonctions paires de* E : $I \perp P$.

PROPOSITION 12
Si n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont orthogonaux deux à deux ($\forall i \neq j, v_i \perp v_j$), alors
$$\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2.$$

Preuve —
$$\begin{aligned} < \sum_{i=1}^n v_i | \sum_{j=1}^n v_i > &= \sum_{1 \le i,j \le n} < v_i | v_j > \qquad \text{car le produit scalaire est bilinéaire} \\ &= \sum_{i=1}^n < v_i | v_i > \qquad \text{car } i \neq j \implies < v_i | v_j >= 0. \end{aligned}$$
□

REMARQUE 13 — 1. *La réciproque est toujours vraie pour* $n = 2$ *vecteurs* $u \in E$ *et* $v \in E$:
$$u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \qquad \textit{(théorème de Pythagore)}$$
Preuve — $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u, v >$ *est égal à* $\|u\|^2 + \|v\|^2$ *si, et seulement si,* $< u, v >= 0$. □

2. *La réciproque n'est pas vraie pour plus de 2 vecteurs. Voici un contre-exemple avec 3 vecteurs : un vecteur* $u \neq 0_E$ *et deux vecteurs* $v = w = -2u$.

PROPOSITION-DÉFINITION 14
On dit qu'une famille $(v_i)_{i \in I}$ finie ou infinie de vecteurs est orthogonale si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux : $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \implies v_i \perp v_j$.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Preuve — On rappelle qu'une famille infinie de vecteurs est libre si toutes ses sous-familles finies sont libres. Soit donc une famille orthogonale $(v_1, \cdots, v_n)$ finie de vecteurs non nuls. On veut montrer que :
$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0_E \implies x_1 = \cdots = x_n = 0.$$
Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$:
$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0_E \implies \underbrace{\langle x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n | v_i \rangle}_{= x_i \langle v_i | v_i \rangle} = \underbrace{\langle 0_E | \varepsilon_i \rangle}_{=0} \implies x_i = 0 \quad \text{car } v_i \neq 0_E.$$
□

DÉFINITION 15
Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E. Soit A une partie de E. L'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A est appelé **l'orthogonal de** A et est noté $A^\perp$:
$$A^\perp = \{ y \in E \mid \forall x \in A,\ x \perp y \}.$$

En particulier $\varnothing^\perp = E$.

EXERCICE 16 — 1. *Montrer que* $\{0_E\}^\perp = E$ *et que* $E^\perp = \{0_E\}$.

2. *Soit le produit scalaire canonique sur l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$. *Soit le vecteur* $\vec{u} = (1, 2, 3)$. *Déterminer une base de* $(\text{Vect } \vec{u})^\perp$.
3. *Soit le produit scalaire* $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)\,dt$ *sur l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}_2[X]$. *Soit le polynôme* $U = 1 + X^2$. *Déterminer une base de* $(\text{Vect } U)^\perp$.

PROPOSITION 17

Soient A et B deux parties d'un espace préhilbertien E.

1. L'orthogonal d'une partie de E est un *sev* de E.
2. $A \perp B \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$.
3. $A \subset (A^\perp)^\perp$.
4. si A est un *sev* de E, alors $A \cap A^\perp = \{0_E\}$, autrement dit les *sev* A et $A^\perp$ sont en somme directe.

Preuve —

1. Soit A une partie de E. On veut montrer que $A^\perp$ est stable par combinaisons linéaires et est non vide. D'une part, $A^\perp$ contient le vecteur nul car 0_E est orthogonal à tout vecteur de E, donc en particulier à tout vecteur de A. D'autre part,
$$\forall x \in A^\perp,\ \forall y \in A^\perp, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R},\quad \lambda x + \mu y \in A^\perp$$
car $\forall z \in A,\quad < z|\lambda x + \mu y >= \lambda < z|x > +\mu < z|y >= 0$.
2. $A \perp B \iff \forall x \in A, x \perp B \iff \forall x \in A, x \in B^\perp \iff A \subset B^\perp$.

   De même $B \perp A \iff B \subset A^\perp$. Or $B \perp A \iff A \perp B$.
3. On applique la propriété précédente aux deux parties A et $B = A^\perp$.
4. Le vecteur nul appartient à $A \cap A^\perp$ (car A et $A^\perp$ sont des *sev* de E). Réciproquement : si un vecteur x appartient à $A \cap A^\perp$, alors $x \perp x$, d'où $< x, x >= 0$, donc $x = 0_E$ car $\boxed{\text{D}}$.

□

VIII.4 Bases orthonormées

DÉFINITION 18

Soit $\langle\cdot|\cdot\rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E. On dit que :

1. un vecteur $x \in E$ est **normé** si sa norme est égale à 1 : $\|x\| = 1$.
2. une famille $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ finie ou infinie de vecteurs est une **famille orthonormée** si ses vecteurs sont normés et deux à deux orthogonaux :
$$\forall (i, j) \in I^2,\quad \langle\varepsilon_i|\varepsilon_j\rangle = \delta_{ij}.$$
   Si une famille orthonormée est une base de E, alors on dit que c'est **une base orthonormée** de E.

Travailler dans une base orthonormée simplifie les calculs. Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Soient deux vecteurs $x = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$ et $y = y_1\varepsilon_1 + \cdots + y_n\varepsilon_n$:

1. $\forall i \in [\![1, n]\!],\quad x_i = \langle x|\varepsilon_i\rangle$;
2. $\langle x|y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = X^T \cdot Y$, où $X = [x]_{\mathcal{C}}$ et $Y = [y]_{\mathcal{C}}$;
3. $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^T \cdot X$.
4. Si $A = (a_{ij})$ est la matrice d'un endomorphisme f dans la *b.o.n.* $\mathcal{C}$, alors $a_{ij} =< \varepsilon_i|f(\varepsilon_j) >$.

Preuve —

1. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$:
$$x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n = x \implies \underbrace{\langle x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n|\varepsilon_i\rangle}_{=x_i} = \langle x|\varepsilon_i\rangle \implies x_i = \langle x|\varepsilon_i\rangle.$$

2. $\langle x|y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i | \sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i|e_j\rangle = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
3. C'est le cas particulier $x = y$.
4. On calcule le produit scalaire des deux vecteurs ε_i et $f(\varepsilon_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\varepsilon_k$.

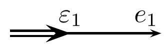
□

VIII.5 L'algorithme de Gram-Schmidt

Existe-t-il toujours une base orthonormée ? La réponse est : oui, si l'espace vectoriel est de dimension finie. Pour le démontrer, on utilise **l'algorithme de Gram-Schmidt** : il change une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ d'un espace euclidien $(E, <\cdot|\cdot>)$ en une nouvelle base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ orthonormée.

Étape n° 1 : $e_1 \longrightarrow \varepsilon_1$ vecteur normé

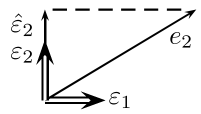
On veut que $\|\varepsilon_1\| = 1$: $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.



Étape n° 2 : $(\varepsilon_1, e_2) \longrightarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ famille orthonormée

Soit $\hat{\varepsilon}_2 = e_2 - \lambda_1\varepsilon_1$: $\hat{\varepsilon}_2 \perp \varepsilon_1 \iff \lambda_1 =< e_2|\varepsilon_1 >$.

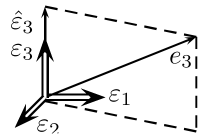
On veut que $\|\varepsilon_2\| = 1$: $\varepsilon_2 = \dfrac{\hat{\varepsilon}_2}{\|\hat{\varepsilon}_2\|}$.



Étape n° 3 : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_3) \longrightarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ famille orthonormée

Soit $\hat{\varepsilon}_3 = e_3 - \lambda_1\varepsilon_1 - \lambda_2\varepsilon_2$: $\hat{\varepsilon}_3 \perp \varepsilon_1 \iff \lambda_1 =< e_3|\varepsilon_1 >$.
$\hat{\varepsilon}_3 \perp \varepsilon_2 \iff \lambda_2 =< e_3|\varepsilon_2 >$.

On veut que $\|\varepsilon_3\| = 1$: $\varepsilon_3 = \dfrac{\hat{\varepsilon}_3}{\|\hat{\varepsilon}_3\|}$.



$\vdots$

Étape n° n : $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}, e_n) \longrightarrow (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ b.o.n. de E

Soit $\hat{\varepsilon}_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\varepsilon_i$: $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$,
$\hat{\varepsilon}_n \perp \varepsilon_i \iff \lambda_i =< e_n|\varepsilon_i >$.

On veut que $\|\varepsilon_n\| = 1$: $\varepsilon_n = \dfrac{\hat{\varepsilon}_n}{\|\hat{\varepsilon}_n\|}$.

Remarque 19 — *1. À chaque* étape n° $k \in [\![1, n]\!]$*, la famille de k vecteurs $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ est une base orthonormée du sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ *et $< e_k|\varepsilon_k >$ est strictement positif.*

2. De plus, la b.o.n. $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ fournie par l'algorithme de Gram-Schmidt est l'unique base vérifiant la propriété 1.

Exercice 20 — *Déterminer une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire*

$$< P, Q >= \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)\, dt.$$

VIII.6 Projection orthogonale (sur un *sev* de dimension finie)

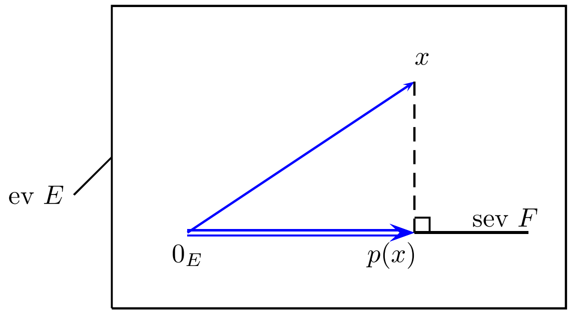
Proposition-Définition 21

Soit $\langle\cdot|\cdot\rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Il existe une unique application linéaire $p : E \to E$ telle que

$$\forall x \in E, \qquad p(x) \in F \quad \text{et} \quad x - p(x) \perp F.$$

On l'appelle la **projection orthogonale** sur F. Si $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormée de F, alors le projeté orthogonal d'un vecteur $x \in E$ s'écrit :

$$\boxed{p(x) = \langle x|\varepsilon_1\rangle\, \varepsilon_1 + \cdots + \langle x|\varepsilon_n\rangle\, \varepsilon_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x|\varepsilon_i\rangle\, \varepsilon_i.}$$



Preuve — **Unicité :** Supposons qu'il existe une projection orthogonale p. Choisissons une b.o.n. $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ de F. Le projeté orthogonal d'un vecteur $x \in E$ peut alors s'écrire $p(x) = \lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n$ car $p(x) \in F$. De plus, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $\langle x - p(x)|\varepsilon_i\rangle = 0$ car $x - p(x) \perp F$. D'où $\langle x|\varepsilon_i\rangle = \langle p(x)|\varepsilon_i\rangle$. Or $\langle p(x)|\varepsilon_i\rangle = \lambda_i$ car la base est orthonormée. Donc

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x|\varepsilon_i\rangle\, \varepsilon_i \quad (*).$$

On a démontré la formule $(*)$ de la projection orthogonale et donc son unicité.

Existence : Soit $p : E \to E$ définie par la formule $(*)$. L'application p est linéaire, $p(x) \in F$ pour tout $x \in E$ et $x - p(x) \perp F$ car $\langle x|\varepsilon_i\rangle = \langle p(x)|\varepsilon_i\rangle$ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$. □

Exercice 22 —
1. *On travaille dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire canonique : écrire la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur le plan F d'équation $x + y = 0$.*
2. *On travaille dans $\mathbb{R}[X]$ avec le produit scalaire $< P, Q >= \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)\, dt$. Montrer que le projeté orthogonal du polynôme X^3 sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ est $\frac{3}{5}X$.*

Corollaire 23

Soit $\langle\cdot|\cdot\rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

1. F et son orthogonal $F^\perp$ sont supplémentaires : $F \oplus F^\perp = E$.
2. Par suite :

(a) la projection orthogonale sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$;
(b) $F = (F^\perp)^\perp$.

Preuve — La projection orthogonale sur F existe car F est de dimension finie. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc $x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p(x)}_{\perp F}$. Donc $E = F + F^\perp$. De plus $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Donc la somme est directe. Et p est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

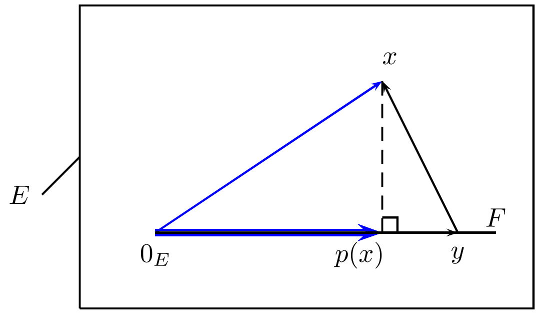
Que le *sev* soit ou non de dimension finie, on a : $F \subset (F^\perp)^\perp$. Reste à montrer que $(F^\perp)^\perp \subset F$ si F est de dimension finie : soit un vecteur $x \in (F^\perp)^\perp$. Comme $E = F \oplus F^\perp$, on peut décomposer ce vecteur : $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in F^\perp$. D'une part, $x \in (F^\perp)^\perp$ par hypothèse. D'autre part, $y \in F \subset (F^\perp)^\perp$. D'où $z = x - y \in (F^\perp)^\perp$. Or $z \in F^\perp$. D'où le vecteur z est nul. Donc $x = y + 0 \in F$. □

Proposition 24 (**Théorème des moindres carrés**)
Soit $\langle\cdot|\cdot\rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit x un vecteur de E. Le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur F est l'unique vecteur de F tel que

$$\forall y \in F, \qquad \|x - p(x)\| \leq \|x - y\|.$$

Preuve — (Voir figure ci-dessous.) Soient $x \in E$ et $y \in F$:

$x - p(x) \perp p(x) - y$ car $x - p(x) \perp F$ et $p(x) - y \in F$. D'où (Pythagore) : $\|x - y\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - y\|^2$.



Donc $\|x - p(x)\| \leq \|x - y\|$.

□

Remarque 25 — *1. D'après le théorème des moindres carrés, la fonction*

$$F \to \mathbb{R}, \; y \mapsto \|x - y\|$$

possède un minimum. Ce minimum est atteint une seule fois : en $p(x)$.

2. Le réel

$$\|x - p(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$$

est appelé la ***distance entre le vecteur** x **et le sous-espace vectoriel** F et est noté*

$$d(x, F).$$

3. D'après le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$. D'où

$$\boxed{\begin{cases} \|p(x)\| \leq \|x\| & \textit{(inégalité de Bessel)} \\ d(x, F) = \min_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p(x)\|^2} \end{cases}}$$

Exercice 26 — *Montrer que la fonction f définie pour tous $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ par*

$$f(a,b,c) = \int_{-1}^{+1} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \, dt$$

possède un minimum : en quel(s) point(s) (a,b,c) ? Quelle est la valeur de ce minimum ?

VIII.7 Hyperplans

Proposition 27
Soit E un ev muni d'un produit scalaire.

1. L'orthogonal d'une droite vectorielle D est un hyperplan H : $D^{\perp} = H$.
2. Si E est de dimension finie, alors l'orthogonal d'un hyperplan H est une droite vectorielle D : $H^{\perp} = D$.

Preuve —

1. Une droite vectorielle $D = \text{Vect}(a)$ est dirigée par un vecteur non nul $a \in E$. Soit $x \in E$ un vecteur :
$$x \in D^{\perp} \iff x \perp a \iff < a, x >= 0 \iff u(x) = 0,$$
où l'application $u : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto < a, x >$ est une forme linéaire. Cette forme linéaire n'est pas nulle car $u(a) =< a, a >\neq 0$. D'où $D^{\perp}$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Donc $D^{\perp}$ est un hyperplan.
2. Si E est de dimension finie n et si H est un hyperplan de E, alors $H \oplus H^{\perp} = E$ et $\dim H = n-1$. D'où $\dim H^{\perp} = 1$. Donc $H^{\perp}$ est une droite vectorielle de E. (Cette propriété n'est pas toujours vraie en dimension infinie, comme on le verra en TD.)

□

Exercice 28 — *Soit E un espace euclidien.*

1. *Soit un vecteur a non nul orthogonal à un hyperplan H. Montrer que :*
$$\forall x \in E, \quad d(x, H) = \frac{|\langle a|x \rangle|}{\|a\|}.$$
2. *Soit $D = \text{Vect}(a)$ la droite vectorielle dirigée par un vecteur a non nul. Montrer que :*
$$\forall x \in E, \quad d(x, D) = \frac{\sqrt{\|a\|^2 \|x\|^2 - \langle a|x \rangle^2}}{\|a\|}.$$

Théorème 29 (de représentation de Riesz)
Soit E un ev de dimension finie, muni d'un produit scalaire. Pour toute forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que : $\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a|x \rangle$.

Preuve — Si E est de dimension n, alors on peut construire une base orthonormée $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ de E en utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt. Dans cette base orthonormée, tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_1 \varepsilon_1 + \cdots + x_n \varepsilon_n$, d'où

$$\varphi(x) = x_1 \varphi(\varepsilon_1) + \cdots + x_n \varphi(\varepsilon_n) = \langle a|x \rangle$$

en posant $a = \varphi(\varepsilon_1)\varepsilon_1 + \cdots + \varphi(\varepsilon_n)\varepsilon_n$. Ce vecteur a convient donc. Et il est unique : par l'absurde, si deux vecteurs a et b conviennent, alors $\langle a|x \rangle = \langle b|x \rangle$ pour tout $x \in E$. D'où le vecteur $b - a$ est orthogonal à tous les vecteurs de E. Donc $b - a = 0_E$. (Cette propriété n'est pas toujours vraie en dimension infinie, comme on le verra en TD.) □