

CORRIGÉ DU D.S. N° 4 DE MATHÉMATIQUES

Il s'agit du corrigé des deux versions MPI & MPI.*

Exercice 1 (Centrale PSI 2024 Math 2).

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

1) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ est convergente.

2) Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

3) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

4) Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

On notera γ sa limite.

5) Soit, pour tout $t > 0$, $f(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right)$. Montrer que la fonction f est positive et intégrable sur $]0, +\infty[$.

6) Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t > 0$, $S_n(t) = e^{-t} \sum_{k=0}^n \left(e^{-kt} - \frac{e^{-kt} - e^{-(k+1)t}}{t} \right)$. Montrer que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$: vers quelle fonction ?

7) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+2}{n+1} \right)$.

8) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \gamma$.

1) L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$, elle converge si, et seulement si, les intégrales sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ convergent.

En $+\infty$, $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\frac{1}{t^2}$ ne change pas de signe et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, d'où l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ converge.

En 0, $e^{-at} - e^{-bt} = (b-a)t + o(t)$ car $e^{-at} = 1 - at + o(t)$ et $e^{-bt} = 1 - bt + o(t)$. D'où $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} (b-a)$. Donc

l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ converge car elle est faussement impropre.

2)

$$\begin{aligned}
\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt &= \int_x^y \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_x^y \frac{e^{-bt}}{t} dt \\
&= \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt \\
&= \left(\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{bx}^{ay} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) - \left(\int_{bx}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt
\end{aligned}$$

3) Pour tout $z > 0$ et pour tout $t \in [az, bz]$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-bz}}{t} &\leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-az}}{t} \\
\text{d'où } \int_{az}^{bz} \frac{e^{-bz}}{t} dt &\leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-az}}{t} dt \\
\text{d'où } e^{-bz} \ln\left(\frac{b}{a}\right) &\leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-az} \ln\left(\frac{b}{a}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$e^{-bx} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - e^{-ay} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \leq e^{-ax} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - e^{-by} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ces inégalités larges passent à la limite en faisant tendre x vers 0 et y vers $+\infty$ et on obtient alors le résultat voulu.

4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$. On en déduit que :

- en sommant sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, d'où la suite (u_n) est minorée par 0 ;
- $u_n - u_{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} \geq 0$, d'où la suite (u_n) est décroissante.

Donc la suite (u_n) est convergente.

5) La fonction f est positive car $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t \geq 1 + t$ par convexité de la fonction exp. D'où, pour tout $t > 0$, $0 < 1 - e^{-t} \leq t$ donc $\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \geq 0$. L'intégrale de la fonction $|f| = f$ est impropre en 0 et en $+\infty$, elle converge ssi les deux intégrales sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ convergent.

Quand t tend vers 0^+ , $1 - e^{-t} = t - \frac{t^2}{2!} + o(t^2)$, d'où $\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}+o(t)} - 1 \right) = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{t}{2} + o(t) \right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$, d'où $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$, donc l'intégrale sur $]0, 1]$ est faussement impropre, donc elle converge.

L'intégrale sur $[1, +\infty[$ converge aussi car, quand t tend vers $+\infty$, $f(t) \sim e^{-t}$ qui ne change pas de signe et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge.

6) Soit $t > 0$. D'une part $\sum_{k=0}^n e^{-kt} = \frac{1 - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}}$ car la raison e^{-t} est différente de 1. D'autre part, la somme télescopique $\sum_{k=0}^n \left(e^{-kt} - e^{-(k+1)t} \right)$ est égale à $1 - e^{-(n+1)t}$. D'où $S_n(t) = e^{-t}(1 - e^{-(n+1)t}) \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t)$. Donc la suite des fonctions S_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction f .

7) Sous réserve qu'on puisse intervertir $\lim_{n \rightarrow \infty}$ et $\int_0^{+\infty}$,

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} S_n(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(e^{-kt} - \frac{e^{-kt} - e^{-(k+1)t}}{t} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+2}{n+1} \right)$$

d'après la question 3.

Le théorème de la convergence dominée permet d'intervertir limite et intégrale car :

- la suite des fonctions S_n converge simplement vers la fonction f d'après la question précédente ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in]0, +\infty[$, $|S_n(t)| = (1 - e^{-(n+1)t}) f(t) \leq f(t)$ et la fonction f est intégrable d'après la question 5.

8) Or $\frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+2}{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, d'où $\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+2}{n+1} \right) = u_{N+2} - u_1 + 1 - \frac{1}{N+2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma - 1 + 1 - 0$.

Donc $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \gamma$.

Exercice 2 (CCINP PSI 2024 Math).

- 1) La fonction $x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est appelée **la fonction Gamma d'Euler**.

Montrer que le réel $\Gamma(x)$ est défini si, et seulement si, $x > 0$.

- 2) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

- 3) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est une intégrale convergente. On admet que sa valeur est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En déduire $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

- 4) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{et} \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{n! 4^n} \sqrt{\pi}.$$

- 5) Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$: vers quelle fonction f ?

- 6) Soit $x > 0$. Montrer que l'intégrale $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$ converge pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et que

$$I_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x).$$

- 7) Soit $x > 0$. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt$ converge et que

$$J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1).$$

En déduire une expression de $J_n(x)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$.

- 8) Soit $x > 0$. Montrer que $I_n(x) = n^x J_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire **l'identité d'Euler** :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

- 9) Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $x > 0$. Montrer que $\Gamma(x+n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (n-1)! n^x$.

- 10) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{1}{2} \ln(n)$. Montrer que $u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- 11) En déduire qu'il existe un réel K tel que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n e^K \sqrt{n}$.

- 12) Déduire des questions précédentes la valeur du réel e^K (ce qui prouvera **la formule de Stirling**).

- 1) Le réel $\Gamma(x)$ est défini ssi l'intégrale $\Gamma(x)$ converge. Or cette intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$, donc elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $\Gamma_1(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ et $\Gamma_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ convergent.

D'une part, $e^{-t} t^{x-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ qui ne change pas de signe. Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt$ converge ssi $1-x < 1$. D'où l'intégrale $\Gamma_1(x)$ converge ssi $x > 0$.

D'autre part, $e^{-t} t^{x-1} = e^{-t/2} e^{-t/2} t^{x-1} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} (e^{-t/2})$ et $e^{-t/2}$ ne change pas de signe. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge. D'où l'intégrale $\Gamma_2(x)$ converge pour tout réel x .

Donc le réel $\Gamma(x)$ est défini ssi $x > 0$.

2) Soit $x > 0$: $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [t^x (-e^{-t})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x t^{x-1} (-e^{-t}) dt$ car les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et parce que les limites $t^x e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$ et $t^x e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ existent et sont finies. Donc $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3) L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est impropre en $+\infty$. Elle converge car $\forall x \geq 1$, $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge.

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{2udu}{u} = 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en posant le CDV $t = u^2$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $]0, +\infty[$. Donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

4) Par récurrence :

- Les propriétés sont vraies au rang 0 car $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

- On suppose les propriétés vraies à un rang n : $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{n! 4^n} \sqrt{\pi}$. Alors, d'après la question 2, $\Gamma(n+1+1) = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$ et $\Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(2n)!}{n! 4^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)! 4^{n+1}} \sqrt{\pi}$ car $n + \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)}$. Elles sont donc vraies au rang $n+1$.

- Les propriétés sont donc vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Soit $x > 0$. Soit $t \in]0, +\infty[$: à partir d'un certain rang n , ce réel t appartient $]0, n[$. Alors $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$, d'où $f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-t} t^{x-1}$ car $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})}$ et $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = n \left(-\frac{t}{n} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{t}{n}\right)\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -t$.

Donc la suite de fonctions (f_n) CVS sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$.

6) Soit $x > 0$. L'intégrale $I_n(x)$ est impropre en 0. De même que $\Gamma_1(x)$, elle converge car $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$.

Puis on utilise le théorème de la convergence dominée :

* Chaque fonction f_n est continue par morceaux.

** D'après la question 5, f_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction f , continue par morceaux.

*** $\forall t \in]0, +\infty[$, $|f_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1}$ (qui ne dépend pas de n) et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ converge d'après la question 1.

D'où $I_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} f(t) dt = \Gamma(x)$.

7) Soit $x > 0$. L'intégrale $J_n(x)$ converge pour la même raison que $I_n(x)$.

On intègre par parties. Soit $a \in]0, 1]$: $\int_a^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \left[\frac{t^x}{x} (1-t)^{n+1}\right]_a^1 + \frac{n+1}{x} \int_a^1 (1-t)^n t^x dt$ car les fonctions $t \mapsto \frac{t^x}{x}$ et $t \mapsto (1-t)^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Or $\left[\frac{t^x}{x} (1-t)^{n+1}\right]_a \xrightarrow[a \rightarrow 0^+]{} 0$.

Donc $J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$.

Enfin, par récurrence, sur $n \in \mathbb{N}$: $J_n(x) = \frac{n}{x} \frac{n-1}{x+1} \dots \frac{1}{x+n-1} J_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)}$.

8) Soit $x > 0$. En posant le CDV $u = \frac{t}{n}$, qui est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone : $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n n^x u^{x-1} du = n^x J_n(x)$. On en déduit l'identité d'Euler en utilisant les questions 6 et 7.

9) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. De la question 2, on déduit que

$$\Gamma(x+n) = x(x+1) \cdots (x+n-1) \Gamma(x) = \frac{x(x+1) \cdots (x+n-1)(x+n) \Gamma(x)}{n! n^x} \cdot \frac{n! n^x}{(x+n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n! n^x}{(x+n)}$$

d'après la question précédente. Donc $\Gamma(x+n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (n-1)! n^x$.

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = -n \ln(1 + \frac{1}{n}) + 1 - \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{1}{n}) = -n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

11) La série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente d'après la question précédente car $\frac{1}{n^2}$ ne change pas de signe et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Or la suite (u_n) a la même nature que la série télescopique, donc elle tend vers un réel K : $\ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{1}{2} \ln(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} K$. D'où $\exp(\ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{1}{2} \ln(n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^K$ par continuité de l'exponentielle. D'où l'équivalent demandé.

12) Un cas particulier de l'équivalent de la question 9 est $\Gamma(n + \frac{1}{2}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (n-1)! \sqrt{n}$. D'où, en utilisant la question 4,

$\frac{(2n)!}{n! 4^n} \sqrt{\pi} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (n-1)! \sqrt{n}$. On remplace chaque factorielle par son équivalent grâce à la question précédente et il vient $\frac{(2n)!}{n! 4^n} \sqrt{\pi} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$.

Exercice 3 (CCP 2008 MP Math 2).

Contexte et notations

Ce problème s'intéresse aux matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Les matrices diagonales et les matrices triangulaires en sont des exemples banals.

- Dans ce problème, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier tel que $n \geq 2$.
- On dira qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre** si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec une occurrence égale à leur multiplicité, c'est-à-dire :

$$A \text{ est à diagonale propre} \iff \chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$$

- On pourra noter en abrégé : A est une **MDP** pour « A est une matrice à diagonale propre ».
- On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.
- On notera également $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques.

Exemples

- 1) Soit α un réel et $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$
 - a) Calculer sous forme factorisée le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$.
 - b) En déduire que, pour tout réel α , la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.
 - c) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?
- 2) La matrice antisymétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle une matrice à diagonale propre ?
- 3) Déterminer $\mathcal{E}_2$.

Quelques propriétés

- 4) Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, démontrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $C = aA + bI_n$ et $C' = a^t A + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre. (*On pourra distinguer le cas $a = 0$*)
- 5) On note G_n l'ensemble des matrices à diagonale propre inversibles. Démontrer que :

$$\forall A \in \mathcal{E}_n, \quad \exists p_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \geq p_0, \quad A - \frac{1}{p} I_n \in G_n$$

6) Matrices trigonalisables

- a) Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?
 - b) Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.
 - c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.
- 7) Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre.
 $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Matrices symétriques et matrices antisymétriques

On pourra utiliser *sans démonstration* le résultat suivant appelé **théorème spectral** :

Tout élément de $\mathcal{S}_n$ est diagonalisable. Plus précisément, si $A \in \mathcal{S}_n$, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'inverse tP telle que tPAP soit diagonale.

8) Matrices symétriques à diagonale propre

a) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Démontrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

b) Déterminer l'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre.

9) Matrices antisymétriques à diagonale propre

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

a) Démontrer que $A^n = 0$ et calculer $({}^tAA)^n$.

b) Justifier que la matrice tAA est diagonalisable puis que ${}^tAA = 0$.

c) Conclure que A est la matrice nulle.

Dimension maximale d'un espace vectoriel inclus dans $\mathcal{E}_n$

10) Rappeler, en le justifiant brièvement, la dimension de $\mathcal{A}_n$.

11) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$.

Déterminer $F \cap \mathcal{A}_n$ et en déduire que $\dim F \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?

12) On suppose $n \geq 3$. Déterminer un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale, mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.

EXEMPLES

1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on calcule $\chi_{M(\alpha)}(x)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -\alpha \\ 0 & x-2 & \alpha \\ -1 & -1 & x-2+\alpha \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{=} \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & 0 \\ 0 & x-2 & \alpha \\ -1 & -1 & x-2+\alpha \end{vmatrix} \stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & \alpha \\ -1 & 0 & x-2+\alpha \end{vmatrix}$$

Puis, on développe selon la première ligne et on obtient :

$$\chi_{M(\alpha)} = (X-1)(X-2)(X-(2-\alpha))$$

b) $\chi_{M(\alpha)}(X)$ est scindé et ses racines sont bien les éléments diagonaux de $M(\alpha)$, comptées avec leur multiplicité.

Pour tout α , la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.

c) — Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ alors la matrice $M(\alpha)$ admet 3 valeurs propres deux à deux distinctes, donc elle est diagonalisable.

— Si $\alpha = 0$, alors les valeurs propres sont 1 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2.

$$\text{rg}(M(0) - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1, \text{ et donc } \dim \text{Ker}(M(0) - 2I_3) = 2 \text{ et } M(0) \text{ est diagonalisable.}$$

— Si $\alpha = 1$, alors les valeurs propres sont 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.

$$\text{rg}(M(1) - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \text{ et donc } \dim \text{Ker}(M(1) - I_3) = 1 < 2 \text{ et } M(1) \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

Finalement, $M(\alpha)$ est diagonalisable si, et seulement si, $\alpha \neq 1$.

2) $\chi_A(X) = X^3 + X = X(X^2 + 1)$ et χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc

A n'est pas à diagonale propre.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(X) = (X - a)(X - d) - bc$.

La matrice A est une MDP si, et seulement si $\chi_A(X) = (X - a)(X - d)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $bc = 0$.

$\mathcal{E}_2$ est donc l'ensemble des matrices triangulaires.

QUELQUES PROPRIETES

4) On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $C = (c_{ij}) = aA + bI_n$.

— Si $a = 0$, alors $C = bI_n$ est bien une MDP puisque $\chi_C(X) = (X - b)^n$.

— Si $a \neq 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \chi_C(x) &= \chi_{aA+bI_n}(x) = \det(xI_n - (aA + bI_n)) = \det((x - b)I_n - aA) = a^n \det\left(\frac{x - b}{a}I_n - A\right) \\ &= a^n \chi_A\left(\frac{x - b}{a}\right) = a^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{x - b}{a} - a_{i,i}\right) = \prod_{i=1}^n (x - b - aa_{i,i}) = \prod_{i=1}^n (x - c_{i,i}) \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $aA + bI_n$ est une matrice à diagonale propre.

Comme ${}^tC = {}^t(aA + bI_n) = a{}^tA + bI_n$ et que le déterminant est invariant par transposition, $\chi_{a{}^tA+bI_n} = \chi_{aA+bI_n}$.

Les éléments diagonaux de C et tC étant les mêmes, $a{}^tA + bI_n$ est une matrice à diagonale propre.

5) Soit $A \in \mathcal{E}_n$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_p = A - \frac{1}{p}I_n$ et on remarque que $\frac{1}{p}$ est valeur propre de A si, et seulement si U_p n'est pas inversible.

D'après la question précédente, U_p est une matrice à diagonale propre, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Supposons par l'absurde que, pour tout $p_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \geq p_0$, tel que $U_p \notin G_n$.

Il existerait alors une infinité de valeurs de p pour lesquelles la matrice $U_p = A - \frac{1}{p}I_n$ ne serait pas inversible, et donc la matrice A admettrait une infinité de valeurs propres. C'est absurde et donc :

$$\forall A \in \mathcal{E}_n, \quad \exists p_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \geq p_0, \quad A - \frac{1}{p}I_n \in G_n$$

6) a) Selon la question 2, il suffit de trouver une matrice trigonalisable non triangulaire supérieure dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour répondre négativement. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ qui est scindé sur $\mathbb{R}$. Elle est donc trigonalisable, mais elle n'est pas triangulaire, donc n'est pas une MDP.

Une matrice trigonalisable n'est pas nécessairement à diagonale propre.

- b) Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice à diagonale propre est scindé, une telle matrice est donc trigonalisable.

Une matrice à diagonale propre est trigonalisable

- c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- Si A est semblable à une matrice B à diagonale propre, alors $\chi_A = \chi_B$ et χ_B est scindé, donc χ_A est scindé.
- Réciproquement, si χ_A est scindé, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, or toute matrice triangulaire est à diagonale propre donc A est semblable à une matrice à diagonale propre.

A est semblable à une matrice à diagonale propre si et seulement si χ_A est scindé.

- 7) — Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme toute matrice triangulaire est à diagonale propre, il suffit d'écrire A comme une somme de deux matrices triangulaires :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre.

- Pour tout $n \geq 2$ il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas à diagonale propre, par exemple la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui n'est pas à diagonale propre.

Cette matrice M qui n'est pas une MDP s'écrit comme somme de deux MDP, donc :

$\mathcal{E}_n$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

MATRICES SYMETRIQUES ET MATRICES ANTISYMETRIQUES

- 8) a) A est une matrice symétrique et réelle, donc il existe une matrice inversible P d'inverse tP et une matrice diagonale D telles que $A = PD{}^tP$. Alors :

$${}^tAA = A^2 = PD{}^tPPD{}^tP = PDD{}^tP = PD^2{}^tP$$

Les deux matrices tAA et D^2 sont semblables, donc ont même trace. Or :

$$\text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \quad \text{et} \quad \text{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2. \quad \text{Donc} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

- b) — Si A est une matrice symétrique à diagonale propre, alors ses valeurs propres sont $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Donc $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2$ ce qui entraîne $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}^2 = 0$, c'est-à-dire que tous les coefficients non diagonaux

de A sont nuls. Ainsi, la matrice A est diagonale.

- Réciproquement, toute matrice diagonale est symétrique réelle et à diagonale propre.

Les matrices symétriques réelles à diagonale propre sont donc exactement les matrices diagonales.

- 9) a) — A est antisymétrique, donc tous ses éléments diagonaux sont nuls et comme elle est à diagonale propre, son polynôme caractéristique est scindé et toutes ses racines sont nulles. On a donc $\chi_A(X) = X^n$ et, par le théorème

de Cayley-Hamilton

$$A^n = 0.$$

$$— ({}^tAA)^n = (-AA)^n = (-1)^n A^{2n} = (-1)^n (A^n)^2 = 0. \text{ Donc } ({}^tAA)^n = 0.$$

- b) Comme ${}^t({}^tAA) = {}^tAA$, la matrice tAA est symétrique réelle et, selon le théorème spectral,

tAA est diagonalisable.

Comme $({}^tAA)^n = 0$, le monôme X^n est annulateur de tAA et son unique racine est 0. Par conséquent, toutes les valeurs propres de tAA sont nulles et tAA est semblable à la matrice nulle. On en déduit que

$${}^tAA = 0.$$

- c) De la question précédente, on déduit que $\text{tr}({}^tAA) = 0$ et d'après la question 8, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 0$.

Cette somme de termes positifs étant nulle, tous ses termes sont nuls, autrement dit,

A est la matrice nulle.

DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTORIEL INCLUS DANS $\mathcal{E}_n$

- 10) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{A}_n$. En notant $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} E_{i,j} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} E_{i,j} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{i,j} E_{i,j} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} E_{i,j} - \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{j,i} E_{i,j} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} E_{i,j} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} E_{j,i} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} (E_{i,j} - E_{j,i}) \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ est génératrice de $\mathcal{A}_n$ et on montre facilement qu'elle est libre, donc une base de $\mathcal{A}_n$.

Son cardinal étant $\binom{n}{2}$, on obtient

$$\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- 11) — De la question 9, on déduit que $F \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$, et donc les sous-espaces F et $\mathcal{A}_n$ sont en somme directe.

Ainsi :

$$\dim F + \dim \mathcal{A}_n = \dim(F + \mathcal{A}_n) \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2 \text{ et alors } \dim F \leq n^2 - \dim \mathcal{A}_n = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

On conclut que

$$\dim F \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et est inclus dans $\mathcal{E}_n$.

La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$ est donc $\frac{n(n+1)}{2}$.

- 12) On prend pour F l'ensemble des matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et

$C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure, c'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & m_{32} & m_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

L'ensemble de ces matrices est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ et n'est pas constitué uniquement de matrices triangulaires.

Les matrices A et C sont à diagonale propre et, d'après ce que l'on a vu en question 7, on en déduit que M est à diagonale propre et donc que $F \subset \mathcal{E}_n$.

F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale, mais tel qu'il ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.

Exercice 4 (XENS 2012 MP Math A).

On se donne un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, et des endomorphismes non nuls e, f, g de E tels que

$$\begin{aligned}e \circ f - f \circ e &= -2g \\f \circ g - g \circ f &= -2e \\g \circ e - e \circ g &= -2f\end{aligned}$$

On note $w = f - ig$ et $z = f + ig$.

- 1) Calculer $e \circ z - z \circ e$, $e \circ w - w \circ e$ et $z \circ w - w \circ z$.
- 2) Soit v un vecteur propre de e , associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que

$$e(z^k(v)) = \mu_k z^k(v).$$

- 3) Montrer qu'il existe un vecteur propre v_0 de e , associé à une valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, et tel que $z(v_0) = 0$.
- 4) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $v_k = w^k(v_0)$. Calculer $e(v_k)$ en fonction de k , λ_0 et v_k .

Calculer $z(v_k)$ en fonction de k , λ_0 et v_{k-1} .

- 5) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que v_{n+1} soit nul et $v_0, \dots, v_n$ soient linéairement indépendants.

- 1) $e \circ z - z \circ e = e \circ f - f \circ e + i(e \circ g - g \circ e) = -2g + 2if = 2iz$. De même, $e \circ w - w \circ e = -2g - 2if = -2iw$ et

$$z \circ w - w \circ z = 4ie \circ (if - fg) = 4ie.$$

- 2) Par récurrence sur k : le résultat est vrai pour $k = 0$ avec $\mu_0 = \lambda$. Supposons-le vrai au rang k . Alors $(e \circ z - z \circ e) \circ z^k = 2iz^{k+1}$. D'où $\mu_{k+1} = \mu_k + 2i$. Donc $e(z^k(v)) = (2ik + \lambda)z^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 3) Puisque $\mu_k = 2ik + \lambda$, la suite (μ_k) est injective. Comme l'endomorphisme e n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres car l'espace est supposé de dimension finie, il existe un entier k tel que $z^k(v) = 0$. Notons encore k le plus petit de ces entiers. Alors $k \geq 1$ car $v \neq 0$. Posons $v_0 = z^{k-1}(v)$. Alors $z(v_0) = z^k(v) = 0$ et $e(v_0) = \mu_{k-1}v_0$. Ainsi, v_0 répond à la question si on pose $\lambda_0 = \mu_{k-1}$.
- 4) $e(v_0) = \lambda_0 v_0$. Montrons par récurrence sur k que $e(v_k) = \lambda_k v_k$. Supposons ce résultat vrai au rang k . Alors $z(v_k) = w(v_k)$. Comme $e \circ w - w \circ e = -2iw$,

$$e(v_{k+1}) - \lambda_k v_{k+1} = -2iv_{k+1}$$

et donc $\lambda_{k+1} = \lambda_k - 2i$ convient. Alors $\lambda_k = \lambda_0 - 2ik$, et

$$e(v_k) = (\lambda_0 - 2ik)v_k.$$

On part ensuite de l'égalité $z \circ w - w \circ z = 4ie$. Appliquée au vecteur v_k , elle donne

$$z(v_{k+1}) - w(z(v_k)) = 4ie(v_k) = 4i(\lambda_0 - 2ik)v_k.$$

Montrons par récurrence sur $k \geq 1$ que $z(v_k) = \mu_k v_{k-1}$. Pour $k = 0$, la relation ci-dessus donne

$$z(v_1) = 4i\lambda_0 v_0.$$

Donc $\mu_1 = 4i\lambda_0$. Supposons la relation vraie au rang k . Alors

$$z(v_{k+1}) = \mu_k v_k + 4i(\lambda_0 - 2ik)v_k.$$

Donc $\mu_{k+1} = \mu_k + 4i(\lambda_0 - 2ik)$. Il en résulte que $\mu_k - \mu_1 = 4i(k-1)\lambda_0 + 8\frac{(k-1)k}{2}$, donc que $\mu_k = 4ik\lambda_0 + 4(k-1)k$.

- 5) La suite (λ_k) étant injective, il existe k tel que $v_k = 0$. Soit $n+1$ le plus petit de ces entiers (v_0 est non nul). Alors $v_{n+1} = 0$. De plus, $(v_0, \dots, v_n)$ est une famille de vecteurs propres de e associés à des valeurs propres distinctes deux à deux. C'est donc une famille libre.