Colle 10 Séries entières

MARTIENNE Lucie

Exercice 1. Développement asymptotique à deux termes de $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \ln(n+x) \mathrm{d}x$?

Exercice 2. (*Mines-2023*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :
i) l'unique valeur propre de A est 1 ,
ii) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(A^2\right) = \cdots = \operatorname{tr}\left(A^n\right) = n$.

Solution **1.** *On cherche un développement asymptotique de* $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx}\ln(n+x)\mathrm{d}x$. *On décompose le logarithme :* $\ln(n+x) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

$$I_n = \ln(n)\int_0^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} e^{-nx}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x$$

Le premier terme vaut $\frac{\ln(n)}{n}$. *Pour le second terme, on pose* $u = nx$ *:*

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-u}\ln\left(1+\frac{u}{n^2}\right)\mathrm{d}u$$

Comme $\ln\left(1+\frac{u}{n^2}\right) \sim \frac{u}{n^2}$ *quand* $n \to +\infty$, *on a :*

$$\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-u}\ln\left(1+\frac{u}{n^2}\right)\mathrm{d}u \sim \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-u}\frac{u}{n^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{n^3}\int_0^{+\infty} ue^{-u}\mathrm{d}u = \frac{1}{n^3}$$

Le développement asymptotique à deux termes est donc :

$$I_n = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Solution **2.** *On vérifie que* $tr(A-I_n)^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\mathrm{tr}A^i = 0$ *pour tout* k *et donc classqiuement* $(A-I_n)$ *est nilpotente.*

PERRAUD Gaëlle

Exercice 3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

a) Montrer que la suite (u_n) converge si $-1 < u_0 \leq 0$.

b) On suppose $u_0 > 0$ et on pose $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

i) Montrer la convergence de la suite (v_n) vers un rél α puis que $0 \leqslant \alpha - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n u_n}$.

ii) Donner un équivalent de u_n.

c) Donner un équivalent de u_n dans le cas $u_0 \in]-1, 0[$.

Solution **3.**

1. *La suite est croissante majorée. Elle converge vers β, tel que $\beta = \beta^2 + \beta$, soit $\beta = 0$.*

2. *Analyse de la suite (u_n) : On vérifie que la suite (u_n) est strictement positive et strictement croissante. Si elle était majorée, elle convergerait vers une limite L. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on aurait $L = L + L^2$ $L = 0$, ce qui est absurde.*
Donc la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Convergence de la suite (v_n) La suite (v_n) est définie par $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) ***Étude de la monotonie de*** (v_n) *: Calculons $v_{n+1} - v_n$:*

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{\ln(u_{n+1})}{2^{n+1}} - \frac{\ln(u_n)}{2^n} = \frac{\ln(u_n + u_n^2) - 2\ln(u_n)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\ln(1+u_n) - \ln u_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{1+u_n}{u_n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \end{aligned}$$

Puisque $u_n > 0$, on a $1/u_n > 0$, donc $1 + 1/u_n > 1$, ce qui implique $\ln(1 + 1/u_n) > 0$. *Ainsi, $v_{n+1} - v_n > 0$, et la suite (v_n) est strictement croissante.*

(b) ***Majoration et convergence de*** $\sum(v_{n+1} - v_n)$ *:*
On a

$$v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k).$$

Et $|v_{k+1} - v_k| \leq= \dfrac{\ln(1 + 1/u_0)}{2^{k+1}}$. Or la série $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\ln(1+1/u_0)}{2^{k+1}} = \dfrac{\ln(1+1/u_0)}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une série géométrique convergente. La série $\displaystyle\sum_k (v_{k+1} - v_k)$ est absolument convergente. Donc la suite (v_n) converge vers une limite réelle que nous notons α.

(c) ***Majoration de*** $\alpha - v_n$ *: On a* $\alpha - v_n = \lim_{N\to\infty}(v_N - v_n) = \sum_{k=n}^{\infty}(v_{k+1} - v_k)$*. En utilisant l'expression de* $v_{k+1} - v_k$ *:*

$$\alpha - v_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln(1 + 1/u_k)}{2^{k+1}}$$

Nous utilisons l'inégalité $\ln(1 + x) \leq x$ *pour* $x > -1$*. Ici,* $x = 1/u_k > 0$*. Donc,* $\ln(1 + 1/u_k) \leq \frac{1}{u_k}$*. Il s'ensuit que :*

$$\alpha - v_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_k \cdot 2^{k+1}}$$

Puisque la suite (u_k) *est strictement croissante, on a :*

$$0 \leq \alpha - v_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_n \cdot 2^{k+1}} = \frac{1}{u_n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{u_n \cdot 2^n}$$

(d) *On en déduit que*

$$v_n \leqslant \alpha \leqslant v_n + \frac{1}{2^n u_n} \iff \frac{\ln(u_n)}{2^n} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\ln(u_n)}{2^n} + \frac{1}{2^n u_n} \iff \ln(u_n) \leqslant \alpha 2^n \leqslant \ln(u_n) + \frac{1}{u_n}$$

Nous avons donc l'encadrement de $\ln(u_n)$ *:*

$$\alpha 2^n - \frac{1}{u_n} \leqslant \ln(u_n) \leqslant \alpha 2^n \iff e^{\alpha 2^n - \frac{1}{u_n}} \leqslant e^{\ln(u_n)} = u_n \leqslant e^{\alpha 2^n}$$

Divisons par $e^{\alpha 2^n}$ *(qui est strictement positif) :*

$$e^{-1/u_n} \leqslant u_n e^{-\alpha 2^n} \leqslant 1$$

Nous savons que $u_n \to +\infty$ *quand* $n \to +\infty$*. Par conséquent,* $1/u_n \to 0$*.*
Ainsi, $\lim_{n\to\infty} e^{-1/u_n} = e^0 = 1$*. D'après le théorème d'encadrement des limites, nous avons :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n e^{-\alpha 2^n} = 1$$

Ceci signifie, par définition d'un équivalent, que :

$$u_n \sim e^{\alpha 2^n} \quad \textit{quand } n \to +\infty$$

3. *si* $-1 < u_0 < 0$*, alors*

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{-1}{1 + u_n} \sim -1$$

La somme de droite est divergente, donc les sommes sont équivalents et $u_n \sim \frac{-1}{n}$*.*
Vous pouvez montrer que

$$u_n = \frac{-1}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

GAUFFRIAU Noé

Exercice 4. On dispose de N urnes ($N \geq 1$) notées $U_1, \ldots, U_N$.
Pour tout k compris entre 1 et N, l'urne U_k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches.
On choisit au hasard une urne avec une probabilité proportionnelle au nombre de boules rouges qu'elle contient, puis on procède à une suite de tirages d'une seule boule avec remise dans l'urne qui a été choisie.

1. Quel est l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire ? Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, quel est la probabilité de choisir l'urne U_k ?
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'évènement "au cours des $2n$ premiers tirages, on a obtenu autant de boules rouges que de boules blanches" et R_{2n+1} l'évènement "on a obtenu une boucle rouge au $(2n+1)$-ième tirage".
2. Exprimer $\mathbb{P}(E_n)$ sous forme d'une somme et donner une expression de $\mathbb{P}(R_{2n+1} \mid E_n)$.
3. Pour $n, p \in \mathbb{N}$, donner une expression de $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p \, \mathrm{d}x$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(R_{2n+1} \mid E_n) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \dfrac{n+2}{2n+3}$.

Solution **4.**

1. *L'univers est l'ensemble* $\{1,2,\ldots,N\}\times\{\text{ Rouge, Blanc }\}^{\mathbb{N}^*}$ *: le résultat de l'expérience est un couple* $\left(k,(c_n)_{n\geq 1}\right)$ *où* k *est le numéro de l'urne choisir et* $(c_n)_{n\geq 1}$ *la suite des couleurs des boules tirées (avec remise) dans cette urne.*
   Notons A_k *l'évènement "On a choisi l'urne* U_k *" et* p_k *sa probabilité. Il existe un réel* α *telle que :*
$$\forall k\in[1,n], p_k=\alpha k.$$
   Comme $p_1+\cdots+p_N=1$*, on obtient* $\alpha\sum_{k=1}^{N}p_k=1$*, soit* $\alpha=\dfrac{2}{N(N+1)}$*. Pour* $k\in[\![1,N]\!]$*, la probabilité de choisir l'urne* k *est donc égale à* $\dfrac{2k}{N(N+1)}$*.*

2. $(A_k)_{1\leq k\leq N}$ *est un système complet d'évènements de probabilités non nulles, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales :*
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n)&=\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}(E_n\mid A_k)P(A_k)=\sum_{k=1}^{N}\binom{2n}{n}\left(\frac{k}{N}\right)^n\left(1-\frac{k}{N}\right)^n\frac{2k}{N(N+1)}\\&=\binom{2n}{n}\frac{2}{(N+1)}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n\end{aligned}$$
   De la même façon :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_{2n+1}\cap E_n)&=\sum_{k=1}^{N}\binom{2n}{n}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n\frac{2k}{N(N+1)}\\&=\binom{2n}{n}\frac{2}{(N+1)}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+2}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n\end{aligned}$$
   et donc
$$\mathbb{P}(R_{2n+1}\mid E_n)=\frac{\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+2}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n}{\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n}$$

3. *Si* $p=0, I_{n,p}=\frac{1}{n+1}$*. Si* $p\geq 1$*, une intégration par partie donne :*
$$I_{n,p}=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(1-x)^p\right]_0^1+\frac{p}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{p-1}\,\mathrm{d}x=\frac{p}{n+1}I_{n+1,p-1}$$
   d'où par récurrence évidente :
$$\forall n,p\in\mathbb{N}, I_{n,p}=\frac{p!n!}{(n+p+1)!}$$

4. *Le dénominateur et le numérateur de* $\mathbb{P}(R_{2n+1}\mid E_n)$ *sont, à un facteur* $1/N$ *près, des sommes de Riemann des intégrales* $I_{n+2,n}$ *et* $I_{n+1,n}$ *pour la subdivision de pas constant* $1/N$*. Comme cette seconde intégrale est non nulle, on en déduit :*
$$\mathbb{P}(R_{2n+1}\mid E_n)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}}=\frac{n+2}{2n+3}.$$