

## CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE T.D. N° 8

*Produits scalaires*

28 novembre 2025

**Exercice 1.** Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien. On note  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Montrer que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}.$$

---


$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\|^2 = \left\langle \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \middle| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\rangle = \frac{1}{\|x\|^2} - 2 \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\|^2 \|y\|^2} + \frac{1}{\|y\|^2} = \left( \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|} \right)^2.$$

**Exercice 2.** 1. Soient  $x, y$  et  $z$  trois réels strictement positifs. Montrer que

$$\left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \cdot (x + y + z) \geq 9.$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ?

2. Soit  $f$  une fonction continue et strictement positive sur un segment  $[a, b]$ . Montrer que

$$\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)} \geq (b - a)^2$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ?

---

1. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^3$  avec les vecteurs  $u = (\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$  et  $v = \left( \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{z}} \right)$ . Ces vecteurs sont correctement définis car  $x, y$  et  $z$  sont strictement positifs.

$$\|u\|^2 = x + y + z, \quad \|v\|^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad \langle u, v \rangle = 3.$$

Or  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ , d'où  $\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$ , donc

$$\left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \cdot (x + y + z) \geq 9.$$

Il y a égalité si, et seulement si, les vecteurs  $u$  et  $v$  sont colinéaires :

$$\exists c \in \mathbb{R}, u = cv \iff \exists c \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sqrt{x} = c/\sqrt{x} \\ \sqrt{y} = c/\sqrt{y} \\ \sqrt{z} = c/\sqrt{z} \end{cases} \iff \exists c \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = c \\ y = c \\ z = c \end{cases} \iff x = y = z.$$

2. Comme  $f(t) > 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ , on peut poser  $f_1(t) = \sqrt{f(t)}$  et  $f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}$  pour tout  $t \in [a, b]$ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(f_1|f_2)^2 = \left( \int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 = (b-a)^2$$

est inférieur ou égal à

$$\|f_1\|^2 \cdot \|f_2\|^2 = \int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt.$$

Il y a égalité si, et seulement si,  $f_1$  et  $f_2$  sont colinéaires :

$$\exists c \in \mathbb{R}, f_1 = cf_2 \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in [a, b], \sqrt{f(t)} = c \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in [a, b], f(t) = c.$$

Donc : il y a égalité si, et seulement si,  $f$  est constante.

**Exercice 3** (Quotient de Rayleigh). Soient  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  définis par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que

$${}^tXAX = 2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}.$$

2. Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \right| \leq \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

3. Que vaut  $\frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$  si  $X$  est un vecteur propre de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{R}$  ?  
 4. En déduire que  $\text{Sp}(A) \subset [0, 4]$ .

1. Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  :  ${}^tXAX = {}^tX \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \vdots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n \\ -x_{n-1} + 2x_n \end{pmatrix} = 2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}$

2. On munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire canonique et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}$  :

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=2}^n x_k^2}. \text{ En outre, } \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \text{ et } \sum_{k=2}^n x_k^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2. \text{ Donc } \left| \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \right| \leq \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

3. Soit  $X$  un vecteur propre de la matrice  $A$  pour une valeur propre  $\lambda$  :

$$\frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \frac{{}^tX(\lambda X)}{{}^tXX} = \lambda.$$

On peut diviser par  ${}^tXX$  car un vecteur propre  $X$  ne peut être nul.

4. Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors il existe un vecteur propre  $X$  associé à cette valeur propre. D'une part,  $\lambda = \frac{{}^t X A X}{{}^t X X}$

d'après la question 3. D'autre part,  $\frac{{}^t X A X}{{}^t X X} = \frac{2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}}{\sum_{k=1}^n x_k^2}$  d'après la question 1. Or  $\left| \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \right| \leq \sum_{k=1}^n x_k^2$

d'après la question 2. D'où  $-2 \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \leq 2 \sum_{k=1}^n x_k^2$ . Donc

$$0 = \frac{2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n x_k^2}{\sum_{k=1}^n x_k^2} \leq \lambda \leq \frac{2 \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n x_k^2}{\sum_{k=1}^n x_k^2} = 4.$$

**Exercice 4.** On munit l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  du produit scalaire  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A {}^t B)$ .

1. On note  $\mathcal{A}_n$  le *sev* des matrices antisymétriques et  $\mathcal{S}_n$  le *sev* des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :

- (a)  $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{S}_n$  ;
- (b)  $\mathcal{A}_n^\perp = \mathcal{S}_n$  et  $\mathcal{S}_n^\perp = \mathcal{A}_n$  ;
- (c) pour tout  $(M, S) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n$ ,  $\| \frac{M-M^T}{2} \| \leq \| M - S \|$ . Quelle est la distance  $d(M, \mathcal{S}_n)$  de la matrice  $M$  au sous-espace vectoriel  $\mathcal{S}_n$  ?

2. On considère le cas  $n = 2$ . Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- (a) Déterminer une base de  $F^\perp$  ▷ **Le corrigé propose deux méthodes.**
- (b) Déterminer la matrice  $A'$ , image de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  par la projection orthogonale sur  $F$  ▷ **Le corrigé propose trois méthodes.**

1. (a) Soient  $A \in \mathcal{A}_n$  et  $S \in \mathcal{S}_n$  : on veut montrer que  $A \perp S$ . Or  $\langle A, S \rangle = \text{tr}(A {}^t S) = \text{tr}(A \cdot S)$  car  $S$  est symétrique et

$$\begin{aligned} \langle S, A \rangle &= \text{tr}(S {}^t A) = \text{tr}(S \cdot (-A)) \text{ car } A \text{ est antisymétrique} \\ &= -\text{tr}(S \cdot A) \text{ car tr est linéaire} \\ &= -\text{tr}(A \cdot S) \text{ car } \text{tr}(A \cdot S) = \text{tr}(S \cdot A). \end{aligned}$$

D'où  $\langle A, S \rangle = 0$ . Donc les *sev*  $\mathcal{A}_n$  et  $\mathcal{S}_n$  sont orthogonaux :  $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{S}_n$ .

(b) De  $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{S}_n$ , on déduit que :  $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n^\perp$  ▷ **proposition 17.**

Or le *sev*  $\mathcal{S}_n$  est de dimension finie, d'où  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{S}_n^\perp$  ▷ **corollaire 23.** Or  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ , d'où  $\dim \mathcal{A}_n = \dim \mathcal{S}_n^\perp$ .

De  $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n^\perp$  et  $\dim \mathcal{A}_n = \dim \mathcal{S}_n^\perp$ , on déduit que  $\mathcal{A}_n = \mathcal{S}_n^\perp$ .

De même  $\mathcal{A}_n^\perp = \mathcal{S}_n$ .

(c) Soit une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  : de  $M = \frac{M+M^T}{2} + \frac{M-M^T}{2}$ , on déduit que  $\frac{M+M^T}{2} = p(M)$  est le projeté orthogonal de la matrice  $M$  sur le *sev*  $\mathcal{S}_n$ . D'après le théorème des moindres carrés,

- pour tout  $S \in \mathcal{S}_n$  :  $\| M - p(M) \| \leq \| M - S \|$ , d'où  $\| \frac{M-M^T}{2} \| \leq \| M - S \|$  ;
- $d(M, \mathcal{S}_n) = \min_{S \in \mathcal{S}_n} \| M - S \| = \| M - p(M) \| = \| \frac{M-M^T}{2} \|$ .

2. (a) Voici **deux méthodes** :

- La dimension du *sev*  $F$  est finie : elle vaut 2 . D'où  $F \oplus F^\perp = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\dim(F^\perp) = 2$ . De plus, on est inspiré et on constate que les deux vecteurs

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ne sont pas colinéaires, et qu'ils sont orthogonaux à  $F$ . Ils forment donc une base de  $F^\perp$ .

- Les matrices  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  forment une base de  $F$ . Soit une matrice  $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$  :

$$B \perp F \iff \begin{cases} B \perp e_1 \\ B \perp e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle B, e_1 \rangle = 0 \\ \langle B, e_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff B = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = xe_3 + ye_4.$$

(b) Voici trois méthodes :

- On est inspiré et on constate que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or la première matrice appartient à  $F$  et la seconde appartient à  $F^\perp$ . Donc le projeté orthogonal de  $A$  sur  $F$  est  $A' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

- La matrice  $A'$  est l'unique matrice telle que (\*)  $A' \in F$  et (\*\*)  $A - A' \perp F$ .

D'abord (\*)  $\iff \exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, A' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ . Ensuite

$$A - A' \perp F \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ 1-b & a \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ 1-b & a \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} 1-2a=0 \\ 1-2b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

- On transforme la base  $(e_1, e_2)$  de  $F$  formée par les matrices  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  en une *b.o.n.*  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt. Puis on calcule la matrice  $A' = \langle A, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle A, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2$ . Essayez, mais c'est un peu plus long.

**Exercice 5.** Montrer que la fonction  $f$  définie pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  par

$$f(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (t - a \sin t - b \cos t)^2 dt$$

possède un minimum et calculer  $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} f(a, b)$ .

---

*Corrigé manuscrit ci-dessous.*

**Exercice 6.** 1. Montrer que  $\langle P | Q \rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t) dt$  est un produit scalaire sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes.

- Calculer  $\langle X^p | X^q \rangle$  pour chaque entier naturel  $p$  et chaque entier naturel  $q$ .
- Soient  $F$  l'ensemble des polynômes constants et  $G$  l'ensemble des polynômes admettant 0 pour racine. Montrer que les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont orthogonaux.
- Déterminer l'orthogonal de  $F$  et l'orthogonal de  $G$ .
- Montrer que la distance d'un polynôme  $P$  au sous-espace vectoriel  $G$  vaut  $|P(0)|$ .

- 
- Soient  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbb{R}$  et  $P, Q, R$  dans  $\mathbb{R}[X]$  :

$$\text{— } \langle P | Q \rangle = \langle Q | P \rangle ;$$

- $\langle \lambda P + \mu Q | R \rangle = \lambda \langle P | R \rangle + \mu \langle Q | R \rangle$  (par linéarité de la dérivée et de l'intégrale), d'où la linéarité à gauche, et à droite par symétrie ;
- $\langle P | P \rangle = P^2(0) + \int_0^1 [P'(t)]^2 dt \geq 0$  par positivité de l'intégrale ;
- si  $\langle P | P \rangle = 0$ , alors chaque terme positif est nul, d'où  $P(0) = 0$  et  $\forall t \in [0, 1], P'(t) = 0$  car la fonction  $t \mapsto [P'(t)]^2$  est continue et positive. D'où la fonction  $t \mapsto P(t)$  est constante sur  $[0, 1]$  et nulle en 0, donc elle est nulle sur  $[0, 1]$ . Par suite, le polynôme  $P$  a une infinité de racines, donc  $P = 0$ .

Donc la forme  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est bilinéaire, symétrique et définie positive : c'est un produit scalaire.

2. Si  $p$  et  $q$  sont dans  $\mathbb{N}^*$ , alors  $\langle X^p | X^q \rangle = 0 + \int_0^1 p t^{p-1} q t^{q-1} dt = \frac{pq}{p+q-1}$ .

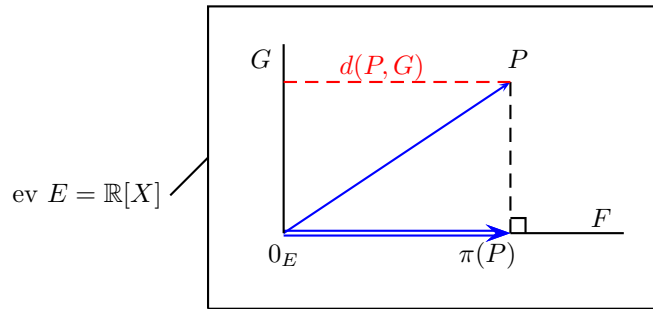
Si  $(p, q) = (0, 0)$ , alors  $\langle 1 | 1 \rangle = 1 \cdot 1 + \int_0^1 0 dt = 1$ .

Si  $p = 0$  et  $q \neq 0$ , alors  $\langle 1 | X^q \rangle = \langle 1 | X^q \rangle = 1 \cdot 0 + \int_0^1 0 \cdot q t^{q-1} dt = 0$ . De même si  $p \neq 0$  et  $q = 0$ .

3. Soient  $P \in F$  et  $Q \in G$  :  $\langle P | Q \rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t) dt$ . Or  $Q(0) = 0$  car  $Q \in G$  et  $\forall t \in [0, 1], P'(t) = 0$  car  $P \in F$ . D'où  $\langle P | Q \rangle = 0$ . Donc  $F \perp G$ .
4. Soit  $Q \in \mathbb{R}[X]$  :

$$Q \in F^\perp \iff \forall P \in F, \langle P | Q \rangle = 0 \iff \forall P \in F, P(0)Q(0) = 0 \iff \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha Q(0) = 0 \iff Q(0) = 0 \iff Q \in G.$$

Donc  $F^\perp = G$ . De plus,  $F$  est de dimension finie (car  $\dim F = 1$ ), d'où  $(F^\perp)^\perp = F$ , donc  $G^\perp = F$ .



5. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  : d'après le théorème des moindres carrés,  $d(P, G) = \|\pi(P)\|$ , où  $\pi$  est la projection orthogonale sur le *sev*  $F$ . Or le polynôme  $P$  se décompose en  $P(X) = P(0) + [P(X) - P(0)]$ , où  $P(0) \in F$  et  $P(X) - P(0) \in G$ . D'où  $\pi(P) = P(0)$ , donc  $d(P, G) = \|P(0)\| = \sqrt{\langle P(0) | P(0) \rangle} = \sqrt{P^2(0) + \int_0^1 0 dt} = |P(0)|$ .

**Exercice 7.** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes. Tout polynôme  $P = \sum_{n=0}^{\deg(P)} a_n X^n$  sera aussi noté  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$  où  $a_n$  est une suite nulle à partir d'un certain rang.

1. Soit  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  la forme linéaire qui, à tout polynôme  $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ , associe le réel  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$ .  
Montrer que l'application  $f$  est surjective.
2. Le produit scalaire de deux polynômes  $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$  et  $Q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$  est défini par  $\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ .  
Montrer qu'il existe un réel  $K$  tel que, pour tout polynôme  $P$  de  $E$ ,

$$|f(P)| \leq K \cdot \|P\|.$$

3. Soit  $F$  le noyau de  $f$ . Vérifier que le polynôme

$$R_{ij} = (j+1)X^j - (i+1)X^i$$

appartient à  $\text{Ker}(f)$  pour tous entiers naturels  $i$  et  $j$ .

4. En déduire que  $F^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$  et que  $(F^\perp)^\perp \neq F$ .

REMARQUE — L'application  $f$  est une forme linéaire non nulle, le *sev*  $F$  est donc un hyperplan. La dernière question prouve ainsi que, en dimension infinie, l'orthogonal d'un hyperplan n'est pas toujours une droite.

▷ **proposition VIII.27** & <https://math-os.com/orthogonal-sev/>

1. On veut montrer que, pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $f(P) = y$ . Soit le polynôme  $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$  défini par

$$a_0 = y \text{ et } \forall n \geq 1, a_n = 0. \text{ Son image est } f(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} = y. \text{ Donc } f \text{ est surjective.}$$

2. Soit  $P$  un polynôme, de degré  $\deg P$  :  $f(P) = \sum_{n=0}^{\deg P} \frac{a_n}{n+1} = (u|v)$  où  $(u|v)$  est le produit scalaire canonique dans l'espace  $\mathbb{R}^{1+\deg P}$  des deux vecteurs  $u = \left(\frac{1}{0+1}, \dots, \frac{1}{\deg(P)+1}\right)$  et  $v = (a_0, \dots, a_{\deg P})$ . Doù (inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$|f(P)| \leq \sqrt{(u|u)} \cdot \sqrt{(v|v)} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\deg P} \frac{1}{(n+1)^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\deg P} a_n^2}. \text{ Or } \sum_{n=0}^{\deg P} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=0}^{\deg P} a_n^2 = \|P\|^2.$$

Donc, pour tout polynôme  $P$ ,

$$|f(P)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|P\|.$$

3. Pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ,  $f(R_{ij}) = \frac{j+1}{j+1} - \frac{i+1}{i+1} = 0$ , d'où  $R_{ij} \in \text{Ker } f$ .
4. Soit  $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ . Si  $P \in F^\perp$ , alors  $P \perp R_{ij}$  pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ . Or  $\langle P | R_{ij} \rangle = (j+1)a_j - (i+1)a_i$ . D'où  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$ ,  $(i+1)a_i = (j+1)a_j$ . En particulier  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $a_i = \frac{a_0}{i+1}$ . D'où  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $a_i = 0$ . Doù  $P$  est le polynôme nul. Donc  $F^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ . Par suite,  $(F^\perp)^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}^\perp = \mathbb{R}[X]$  est différent de  $F$  car  $1 \notin F$  (car  $f(1) = 1 \neq 0$ ).

**Exercice 8.** On munit l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}[X]$  du produit scalaire  $\langle P(X) | Q(X) \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$  et on définit la forme linéaire  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P(X) \mapsto P(0)$ . On suppose qu'un polynôme  $A(X)$  est tel que  $h(P(X)) = \langle A(X) | P(X) \rangle$  pour tout  $P(X) \in E$ . Calculer  $\langle A(X) | XA(X) \rangle$  et conclure.

On fait l'hypothèse qu'il existe un polynôme  $A(X)$  tel que  $P(0) = \langle A(X) | P(X) \rangle$  pour tout  $P(X) \in E$ .

D'une part,  $\langle A(X) | XA(X) \rangle = \int_0^1 A(t)tA(t) dt = \int_0^1 tA^2(t) dt$  par définition du produit scalaire dont on a muni dans cet exercice l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}[X]$ .

D'autre part,  $\langle A(X) | XA(X) \rangle = h(XA(X)) = 0A(0) = 0$  par hypothèse.

D'où  $\int_0^1 tA^2(t) dt = 0$ . Or la fonction  $t \mapsto tA^2(t)$  est continue et positive sur  $[0, 1]$ . Donc elle est nulle car d'intégrale nulle sur  $[0, 1]$ . Par suite, le polynôme  $XA^2(X)$  a une infinité de racines (car tous les réels de  $[0, 1]$  le sont). Or le polynôme  $X$  n'est pas nul, donc c'est le polynôme  $A(X)$  qui est nul. (Pour rappel, si le produit de deux polynômes est nul, alors au moins un des polynômes est nul, autrement dit : l'anneau  $\mathbb{R}[X]$  est intègre.)

C'est absurde car  $\langle A(X) | 1_{\mathbb{R}[X]} \rangle = 1_{\mathbb{R}} \neq 0$  par hypothèse. Donc il n'existe pas de polynôme  $A(X)$  tel que  $P(0) = \langle A(X) | P(X) \rangle$  pour tout  $P(X) \in E$ . On vient de prouver, par un contre-exemple, que le théorème de représentation de Riesz ▷ **VIII.29** n'est pas valable en dimension infinie.

**Exercice 9.** Soient  $E$  un espace euclidien,  $u$  et  $v$  deux vecteurs non nuls, et  $f$  l'endomorphisme défini par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle v | x \rangle u.$$

1. Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ , dans laquelle  $u$  et  $v$  sont représentés par les vecteurs colonnes  $U$  et  $V$ . Exprimer, grâce à ces vecteurs colonnes :
  - le produit scalaire  $\langle u | v \rangle$  ;
  - la matrice, dans la base  $\mathcal{B}$ , de l'endomorphisme  $f$ .

2. Déterminer les noyau et image de  $f$
3. On suppose que  $u$  n'est pas orthogonal à  $v$ . Montrer que les noyau et image de  $f$  sont supplémentaires et que  $f$  est diagonalisable. Quel est le spectre de  $f$  ?
4. On suppose que  $u$  est orthogonal à  $v$ . Déterminer  $f \circ f$ . Les noyau et image de  $f$  sont-ils supplémentaires ? L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

1. Notons la base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  :

$$\begin{aligned}\langle u|v \rangle &= \langle \sum_{i=1}^n u_i e_i | \sum_{j=1}^n v_j e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \langle e_i | e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n u_i v_i \\ &= {}^t U V.\end{aligned}$$

Par suite, pour tout  $x \in E$  :

$$\begin{aligned}f(x) &= ({}^t V \cdot X) \cdot U \\ &= U \cdot ({}^t V \cdot X) \quad \text{car } {}^t V \cdot X \text{ est une matrice } 1 \times 1 \text{ et commute donc avec } U \\ &= (U \cdot {}^t V) \cdot X \quad \text{car la multiplication matricielle est associative.}\end{aligned}$$

La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est donc la matrice carrée  $U \cdot {}^t V$ .

2. Pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = \langle v|x \rangle u$  est colinéaire au vecteur  $u$ . Donc l'image de  $f$  est incluse dans  $\text{Vect}(u)$  et est donc égale à  $\{0_E\}$  ou à  $\text{Vect}(u)$ . Or  $f(v) = \langle v|v \rangle u$  est non nul, donc  $\text{Im } f = \text{Vect}(u)$ .

Si  $x \in \text{Ker } f$ , alors  $\langle v|x \rangle u = 0_E$ . Or  $u \neq 0_E$ , d'où  $\langle v|x \rangle = 0$ , donc  $\text{Ker } f \subset (\text{Vect}(v))^\perp$ . Réciproquement, si  $x$  appartient à  $(\text{Vect}(v))^\perp$ , alors  $f(x) = 0_E$ . Donc  $(\text{Vect}(v))^\perp = \text{Ker } f$ .

3. Si  $u$  n'est pas orthogonal à  $v$ , alors  $u$  n'appartient pas au noyau de  $f$ , d'où  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$  et, comme  $\dim E = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f$  (théorème du rang), noyau et image sont supplémentaires.

Le noyau de  $f$  est le *sep* associé à la valeur propre 0. En outre,  $u$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\langle v|u \rangle$  car  $f(u) = \langle v|u \rangle u$  et  $u \neq 0_E$ . D'où une base adaptée à la somme directe  $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E$  sera une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ . Donc  $f$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(f) = \{\langle v|u \rangle; 0\}$ .

4. Si  $u$  est orthogonal à  $v$ , alors

$$f \circ f(x) = u \langle v|u \langle v|x \rangle \rangle = u \langle v|u \rangle \langle v|x \rangle = 0$$

pour tout  $x \in E$ , donc  $f \circ f = 0$ . Noyau et image ne sont pas supplémentaires car  $u$  appartient à leur intersection.

En outre, la seule valeur propre possible de  $f$  est 0 car 0 est la seule racine du polynôme  $X^2$ , annulateur de  $f$ . Si  $f$  était diagonalisable, alors ce serait l'endomorphisme nul. Or  $f(v) = u \langle v|v \rangle \neq 0_E$ . Donc  $f$  n'est pas diagonalisable.

**Exercice 10** (La fonction zêta de Riemann est log-convexe).

On rappelle que  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  est défini pour tout  $x > 1$ .

On dit qu'une fonction  $f$  est **log-convexe** si la fonction  $f$  est strictement positive et si la fonction  $\ln \circ f$  est convexe.

1. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  et, pour tout  $x > 1$ ,  $S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x}$ . Montrer que la fonction  $S_N$  est deux fois dérivable sur  $]1, +\infty[$  et que

$$[S'_N(x)]^2 \leq S''_N(x) \cdot S_N(x)$$

pour tout  $x > 1$ .

2. En déduire que  $[\zeta'(x)]^2 \leq \zeta''(x) \cdot \zeta(x)$  pour tout  $x > 1$  ▷ corollaire 19 du chapitre VII.
3. Conclure que la fonction  $\zeta$  est log-convexe.
4. Montrer que, si une fonction est log-convexe, alors elle est convexe.

1. Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x > 1$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ . Chaque fonction  $f_n$  est deux fois dérivable sur  $]1, +\infty[$  et, pour tout  $x > 1$ ,  $f'_n(x) = \frac{-\ln n}{n^x}$  et  $f''_n(x) = \frac{(\ln n)^2}{n^x}$ . Par suite, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $S_N$  est deux fois dérivable et

$[S'_N(x)]^2 = \left( \sum_{n=1}^N \frac{-\ln n}{n^x} \right)^2 = \langle u, v \rangle^2$ , où  $\langle u, v \rangle$  est le produit scalaire usuel des deux vecteurs  $u = \left( \frac{\ln 1}{1^{x/2}}, \dots, \frac{\ln N}{N^{x/2}} \right)$  et  $v = \left( \frac{1}{1^{x/2}}, \dots, \frac{1}{N^{x/2}} \right)$  de  $\mathbb{R}^N$ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,  $\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$ . Or  $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^N \frac{(\ln n)^2}{(n^{x/2})^2} = S''_N(x)$

et  $\|v\|^2 = \sum_{n=1}^N \frac{1^2}{(n^{x/2})^2} = S_N(x)$ . Donc  $[S'_N(x)]^2 \leq S''_N(x) \cdot S_N(x)$  pour tout  $x > 1$ .

2. On a prouvé que  $\left[ \sum_{n=1}^N f'_n(x) \right]^2 \leq \sum_{n=1}^N f''_n(x) \cdot \sum_{n=1}^N f_n(x)$ . Il reste à prouver que :

— les limites  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x)$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} S'_N(x)$  et  $\lim_{N \rightarrow \infty} S''_N(x)$  existent, cela permettra d'écrire

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \right]^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} f''_n(x) \cdot \zeta(x)$$

car les inégalités larges passent à la limite  $N \rightarrow \infty$  ;

— on peut dériver terme à terme, cela permettra d'écrire  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \zeta'(x)$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} f''_n(x) = \zeta''(x)$ .

Pour ce faire, on utilise le [▷ corollaire 19 du chapitre VII](#). Soient  $a > 1$  et  $\epsilon > 0$  tel que  $a - \epsilon > 1$  :

\* Chaque fonction  $f_n$  est de classe  $C^2$  sur  $[a, +\infty[$ .

\*\* Les séries de fonctions  $\sum f_n$  et  $\sum f'_n$  convergent simplement sur  $[a, +\infty[$  car, pour tout  $x > a$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^a}$  et la série numérique  $\sum \frac{1}{n^a}$  converge d'après le critère de Riemann. Et  $|f'_n(x)| \leq \frac{\ln n}{n^a} \leq \frac{\ln n}{n^\epsilon} \frac{1}{n^{a-\epsilon}} = \underset{n \rightarrow \infty}{o} \left( \frac{1}{n^{a-\epsilon}} \right)$ , la suite  $\frac{1}{n^{a-\epsilon}}$  ne change pas de signe et la série numérique  $\sum \frac{1}{n^{a-\epsilon}}$  converge.

\*\*\* La série de fonctions  $\sum f''_n$  converge normalement (donc uniformément) sur  $[a, +\infty[$  car  $|f''_n(x)| \leq \frac{(\ln n)^2}{n^x} \leq \frac{(\ln n)^2}{n^\epsilon} \frac{1}{n^{a-\epsilon}} = \underset{n \rightarrow \infty}{o} \left( \frac{1}{n^{a-\epsilon}} \right)$ .

Donc la fonction  $\zeta$  est de classe  $C^2$  sur  $[a, +\infty[$  et on peut dériver terme à terme. C'est vrai pour tout  $a > 1$ , donc sur  $]1, +\infty[$ . En conclusion,  $[\zeta'(x)]^2 \leq \zeta''(x) \cdot \zeta(x)$  pour tout  $x > 1$ .

3. D'une part, la fonction  $\zeta$  est strictement positive car  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geq 1$  pour tout  $x > 1$ . D'autre part, la fonction  $\ln \circ \zeta$  est

convexe car elle est deux fois dérivable (par composition) et sa dérivée seconde est positive. En effet,  $\frac{d}{dx} \ln \circ \zeta(x) = \frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)}$ ,

d'où  $\frac{d^2}{dx^2} \ln \circ \zeta(x) = \frac{\zeta''(x)\zeta(x) - \zeta'(x)^2}{\zeta^2(x)} \geq 0$  pour tout  $x > 1$ , d'après la question précédente.

4. On suppose que la fonction  $f$  est log-convexe. Soient  $x$  et  $y$  deux réels appartenant à l'ensemble de définition de la fonction  $f$ . Soit  $\lambda \in [0, 1]$ . On veut montrer que  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$  :

$\ln f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \ln f(x) + (1 - \lambda) \ln f(y)$  car  $f$  est log-convexe.

D'où  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \exp[\lambda \ln f(x) + (1 - \lambda) \ln f(y)]$  par croissance de la fonction exp.

Enfin, la fonction exp est convexe, d'où  $\exp[\lambda \ln f(x) + (1 - \lambda) \ln f(y)] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ .

D'où  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ .

Donc la fonction  $f$  est convexe.