Corrigé de la feuille de T.D. n° 8

Produits scalaires

28 novembre 2025

Exercice 1. Soient x et y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien. On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $<\cdot\mid\cdot>$. Montrer que

$$\left\|\frac{x}{\|x\|^2}-\frac{y}{\|y\|^2}\right\|=\frac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}.$$

$$\left\|\frac{x}{\|x\|^2}-\frac{y}{\|y\|^2}\right\|^2=<\frac{x}{\|x\|^2}-\frac{y}{\|y\|^2}\mid\frac{x}{\|x\|^2}-\frac{y}{\|y\|^2}>=\frac{1}{\|x\|^2}-2\frac{<x|y>}{\|x\|^2\|y\|^2}+\frac{1}{\|y\|^2}=\left(\frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}\right)^2.$$

Exercice 2.

1. Soient x, y et z trois réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot(x+y+z)\geq 9.$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ?

2. Soit f une fonction continue et strictement positive sur un segment $[a,b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\times\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}\geqslant(b-a)^2$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ?

---

1. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$ avec les vecteurs $u=(\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{y})$ et $v=\left(\frac{1}{\sqrt{x}},\frac{1}{\sqrt{y}},\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ Ces vecteurs sont correctement définis car x, y et z sont strictement positifs.

$$\|u\|^2=x+y+z\quad,\quad\|v\|^2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\quad\text{et}\quad<u,v>=3.$$

Or $|<u,v>|\leq\|u\|\cdot\|v\|$, d'où $<u,v>^2\leq\|u\|^2\cdot\|v\|^2$, donc

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot(x+y+z)\geq 9.$$

Il y a égalité si, et seulement si, les vecteurs u et v sont colinéaires :

$$\exists c\in\mathbb{R},\ u=cv\iff\exists c\in\mathbb{R},\ \begin{cases}\sqrt{x}=c/\sqrt{x}\\\sqrt{y}=c/\sqrt{y}\\\sqrt{z}=c/\sqrt{z}\end{cases}\iff\exists c\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x=c\\y=c\\z=c\end{cases}\iff x=y=z.$$

2. Comme $f(t)>0$ pour tout $t\in[a,b]$, on peut poser $f_1(t)=\sqrt{f(t)}$ et $f_2(t)=\frac{1}{\sqrt{f(t)}}$ pour tout $t\in[a,b]$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$(f_1|f_2)^2=\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}dt\right)^2=(b-a)^2$$
est inférieur ou égal à
$$||f_1||^2\cdot||f_2||^2=\int_a^b f(t)dt\int_a^b\frac{1}{f(t)}dt.$$
Il y a égalité si, et seulement si, f_1 et f_2 sont colinéaires :
$$\exists c\in\mathbb{R},\ f_1=cf_2\iff\exists c\in\mathbb{R},\ \forall t\in[a,b],\ \sqrt{f(t)}=c\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\iff\exists c\in\mathbb{R},\ \forall t\in[a,b],\ f(t)=c.$$
Donc : il y a égalité si, et seulement si, f est constante.

Exercice 3 (Quotient de Rayleigh)**.** Soient $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définis par
$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\quad\text{et}\quad A=\begin{pmatrix}2&-1&0&&\\-1&2&-1&&\Large 0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\\Large 0&&-1&2&-1\\&&0&-1&2\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que
$$^tXAX=2\sum_{k=1}^n x_k^2-2\sum_{k=1}^{n-1}x_kx_{k+1}.$$
2. Montrer que
$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}x_kx_{k+1}\right|\leq\sum_{k=1}^n x_k^2.$$
3. Que vaut $\frac{^tXAX}{^tXX}$ si X est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre $\lambda\in\mathbb{R}$?
4. En déduire que $\mathrm{Sp}(A)\subset[0,4]$.

---

1. Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$: $\quad {}^tXAX={}^tX\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\-x_1+2x_2-x_3\\\vdots\\-x_{n-2}+2x_{n-1}-x_n\\-x_{n-1}+2x_n\end{pmatrix}=2\sum_{k=1}^n x_k^2-2\sum_{k=1}^{n-1}x_kx_{k+1}$
2. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_{n-1}\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_2\\\vdots\\x_n\\0\end{pmatrix}$:
$\left|\sum_{k=1}^{n-1}x_kx_{k+1}\right|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}x_k^2}\sqrt{\sum_{k=2}^n x_k^2}$. En outre, $\sum_{k=1}^{n-1}x_k^2\leq\sum_{k=1}^n x_k^2$ et $\sum_{k=2}^n x_k^2\leq\sum_{k=1}^n x_k^2$. Donc $\left|\sum_{k=1}^{n-1}x_kx_{k+1}\right|\leq\sum_{k=1}^n x_k^2$.
3. Soit X un vecteur propre de la matrice A pour une valeur propre λ :
$$\frac{^tXAX}{^tXX}=\frac{^tX(\lambda X)}{^tXX}=\lambda.$$
On peut diviser par ^tXX car un vecteur propre X ne peut être nul.

4. Si λ est une valeur propre de A, alors il existe un vecteur propre X associé à cette valeur propre. D'une part, $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$ d'après la question 3. D'autre part, $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \dfrac{2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$ d'après la question 1. Or $\left|\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ d'après la question 2. D'où $-2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \leq 2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$. Donc

$$0 = \frac{2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2} \leq \lambda \leq \frac{2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2} = 4.$$

Exercice 4. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A\ {}^tB)$.

1. On note $\mathcal{A}_n$ le *sev* des matrices antisymétriques et $\mathcal{S}_n$ le *sev* des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
   (a) $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{S}_n$;
   (b) $\mathcal{A}_n^{\perp} = \mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}_n^{\perp} = \mathcal{A}_n$;
   (c) pour tout $(M, S) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n$, $\|\frac{M-M^T}{2}\| \leq \|M - S\|$. Quelle est la distance $d(M, \mathcal{S}_n)$ de la matrice M au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n$?
2. On considère le cas $n = 2$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

   (a) Déterminer une base de $F^{\perp}$ ▷ **Le corrigé propose deux méthodes.**
   (b) Déterminer la matrice A', image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par la projection orthogonale sur F ▷ **Le corrigé propose trois méthodes.**

---

1. (a) Soient $A \in \mathcal{A}_n$ et $S \in \mathcal{S}_n$: on veut montrer que $A \perp S$. Or $< A, S >= \operatorname{tr}(A \cdot^t S) = \operatorname{tr}(A \cdot S)$ car S est symétrique et

$$\begin{aligned} < S, A > &= \operatorname{tr}(S \cdot^t A) = Tr(S \cdot (-A)) \text{ car } A \text{ est antisymétrique} \\ &= -\operatorname{tr}(S \cdot A) \text{ car tr est linéaire} \\ &= -\operatorname{tr}(A \cdot S) \text{ car } \operatorname{tr}(A \cdot S) = \operatorname{tr}(S \cdot A). \end{aligned}$$

D'où $< A, S >= 0$. Donc les *sev* $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont orthogonaux : $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{S}_n$.

(b) De $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{S}_n$, on déduit que : $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n^{\perp}$ ▷ **proposition 17**.

Or le *sev* $\mathcal{S}_n$ est de dimension finie, d'où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{S}_n^{\perp}$ ▷ **corollaire 23**. Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$, d'où $\dim \mathcal{A}_n = \dim \mathcal{S}_n^{\perp}$.

De $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n^{\perp}$ et $\dim \mathcal{A}_n = \dim \mathcal{S}_n^{\perp}$, on déduit que $\mathcal{A}_n = \mathcal{S}_n^{\perp}$.

De même $\mathcal{A}_n^{\perp} = \mathcal{S}_n$.

(c) Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: de $M = \frac{M+M^T}{2} + \frac{M-M^T}{2}$, on déduit que $\frac{M+M^T}{2} = p(M)$ est le projeté orthogonal de la matrice M sur le *sev* $\mathcal{S}_n$. D'après le théorème des moindres carrés,

- pour tout $S \in \mathcal{S}_n$: $\|M - p(M)\| \leq \|M - S\|$, d'où $\|\frac{M-M^T}{2}\| \leq \|M - S\|$;
- $d(M, \mathcal{S}_n) = \min\limits_{S \in \mathcal{S}_n} \|M - S\| = \|M - p(M)\| = \|\frac{M-M^T}{2}\|$.

2. (a) Voici **deux méthodes** :

— La dimension du *sev* F est finie : elle vaut 2 . D'où $F \oplus F^{\perp} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\dim(F^{\perp}) = 2$. De plus, on est inspiré et on constate que les deux vecteurs

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne sont pas colinéaires, et qu'ils sont orthogonaux à F. Ils forment donc une base de $F^{\perp}$.

— Les matrices $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ forment une base de F. Soit une matrice $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$:

$$B \perp F \iff \begin{cases} B \perp e_1 \\ B \perp e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} < B, e_1 >= 0 \\ < B, e_2 >= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff B = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = xe_3 + ye_4.$$

(b) Voici **<u>trois méthodes</u>** :

— On est inspiré et on constate que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or la première matrice appartient à F et la seconde appartient à $F^{\perp}$. Donc le projeté orthogonal de A sur F est $A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

— La matrice A' est l'unique matrice telle que $(*)$ $A' \in F$ et $(**)$ $A - A' \perp F$.

D'abord $(*) \iff \exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ A' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Ensuite

$$A - A' \perp F \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ 1-b & a \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ 1-b & a \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 2a = 0 \\ 1 - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

— On transforme la base (e_1, e_2) de F formée par les matrices $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en une *b.o.n.* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt. Puis on calcule la matrice $A' =< A, \varepsilon_1 > \varepsilon_1 + < A, \varepsilon_2 > \varepsilon_2$. Essayez, mais c'est un peu plus long.

Exercice 5. Montrer que la fonction f définie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (t - a \sin t - b \cos t)^2 dt$$

possède un minimum et calculer $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a, b)$.

Corrigé manuscrit ci-dessous.

Exercice 6. 1. Montrer que $< P\,|Q >= P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,dt$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes.

2. Calculer $< X^p\,|X^q >$ pour chaque entier naturel p et chaque entier naturel q.
3. Soient F l'ensemble des polynômes constants et G l'ensemble des polynômes admettant 0 pour racine. Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux.
4. Déterminer l'orthogonal de F et l'orthogonal de G.
5. Montrer que la distance d'un polynôme P au sous-espace vectoriel G vaut $|P(0)|$.

---

1. Soient λ, μ dans $\mathbb{R}$ et P, Q, R dans $\mathbb{R}[X]$:
   — $< P|Q >=< Q|P >$;

— $\langle \lambda P+\mu Q|R\rangle = \lambda\langle P|R\rangle+\mu\langle Q|R\rangle$ (par linéairité de la dérivée et de l'intégrale), d'où la linéarité à gauche, et à droite par symétrie ;

— $\langle P|P\rangle = P^2(0)+\int_0^1 [P'(t)]^2\ dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale ;

— si $\langle P|P\rangle = 0$, alors chaque terme positif est nul, d'où $P(0)=0$ et $\forall t\in[0,1],\ P'(t)=0$ car la fonction $t\mapsto [P'(t)]^2$ est continue et positive. D'où la fonction $t\mapsto P(t)$ est constante sur $[0,1]$ et nulle en 0, donc elle est nulle sur $[0,1]$. Par suite, le polynôme P a une infinité de racines, donc $P=0$.

Donc la forme $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire, symétrique et définie positive : c'est un produit scalaire.

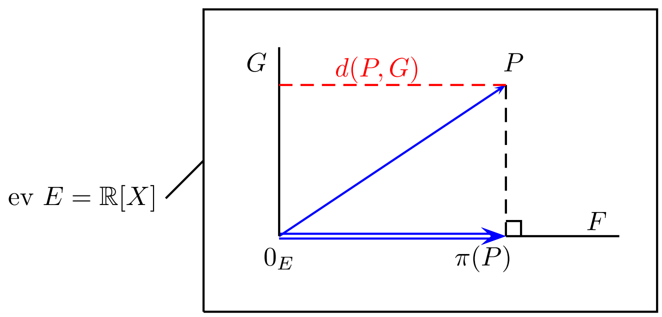
2. Si p et q sont dans $\mathbb{N}^*$, alors $\langle X^p|X^q\rangle = 0+\int_0^1 pt^{p-1}qt^{q-1}\,dt = \dfrac{pq}{p+q-1}$.

   Si $(p,q)=(0,0)$, alors $\langle 1|1\rangle = 1\cdot 1+\int_0^1 0\,dt = 1$.

   Si $p=0$ et $q\neq 0$, alors $\langle 1|X^q\rangle = \langle 1|X^q\rangle = 1\cdot 0+\int_0^1 0\cdot qt^{q-1}\,dt = 0$. De même si $p\neq 0$ et $q=0$.
3. Soient $P\in F$ et $Q\in G$: $< P|Q >= P(0)Q(0)+\int_0^1 P'(t)Q'(t)\,dt$. Or $Q(0)=0$ car $Q\in G$ et $\forall t\in[0,1],\ P'(t)=0$ car $P\in F$. D'où $< P|Q >= 0$. Donc $F\perp G$.
4. Soit $Q\in\mathbb{R}[X]$:

   $Q\in F^\perp \iff \forall P\in F,\ \langle P|Q\rangle = 0 \iff \forall P\in F,\ P(0)Q(0)=0 \iff \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha Q(0)=0 \iff Q(0)=0 \iff Q\in G.$

   Donc $F^\perp = G$. De plus, F est de dimension finie (car $\dim F = 1$), d'où $\left(F^\perp\right)^\perp = F$, donc $G^\perp = F$.



5. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$: d'après le théorème des moindres carrés, $d(P,G)=\|\pi(P)\|$, où π est la projection orthogonale sur le *sev* F. Or le polynôme P se décompose en $P(X)=P(0)+[P(X)-P(0)]$, où $P(0)\in F$ et $P(X)-P(0)\in G$. D'où $\pi(P)=P(0)$, donc $d(P,G)=\|P(0)\| = \sqrt{\langle P(0)|P(0)\rangle} = \sqrt{P^2(0)+\int_0^1 0\,dt} = |P(0)|$.

Exercice 7. Soit $E=\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. Tout polynôme $P=\displaystyle\sum_{n=0}^{\deg(P)} a_nX^n$ sera aussi noté $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$ où a_n est une suite nulle à partir d'un certain rang.

1. Soit $f\ :\ \mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}$ la forme linéaire qui, à tout polynôme $P=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$, associe le réel $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}$.

   Montrer que l'application f est surjective.
2. Le produit scalaire de deux polynômes $P=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$ et $Q=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_nX^n$ est défini par $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_nb_n$.

   Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout polynôme P de E,

   $$|f(P)|\leq K\cdot\|P\|.$$
3. Soit F le noyau de f. Vérifier que le polynôme

   $$R_{ij} = (j+1)X^j-(i+1)X^i$$

   appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ pour tous entiers naturels i et j.
4. En déduire que $F^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$.

Remarque — L'application f est une forme linéaire non nulle, le *sev* F est donc un hyperplan. La dernière question prouve ainsi que, en dimension infinie, l'orthogonal d'un hyperplan n'est pas toujours une droite.
▷ **proposition VIII.27** & https://math-os.com/orthogonal-sev/

---

1. On veut montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(P) = y$. Soit le polynôme $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ défini par $a_0 = y$ et $\forall n \geq 1,\ a_n = 0$. Son image est $f(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} = y$. Donc f est surjective.
2. Soit P un polynôme, de degré $\deg P$: $f(P) = \sum_{n=0}^{\deg P} \frac{a_n}{n+1} = (u|v)$ où $(u|v)$ est le produit scalaire canonique dans l'*ev* $\mathbb{R}^{1+\deg P}$ des deux vecteurs $u = \left(\frac{1}{0+1}, \cdots, \frac{1}{\deg(P)+1}\right)$ et $v = (a_0, \cdots, a_{\deg P})$. Doù (inégalité de Cauchy-Schwarz) $|f(P)| \leq \sqrt{(u|u)} \cdot \sqrt{(v|v)} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\deg P} \frac{1}{(n+1)^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\deg P} a_n^2}$. Or $\sum_{n=0}^{\deg P} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=0}^{\deg P} a_n^2 = \|P\|^2$.

   Donc, pour tout polynôme P, $\boxed{|f(P)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|P\|.}$
3. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $f(R_{ij}) = \frac{j+1}{j+1} - \frac{i+1}{i+1} = 0$, d'où $R_{ij} \in \mathrm{Ker} f$.
4. Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$. Si $P \in F^{\perp}$, alors $P \perp R_{ij}$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Or $\langle P | R_{ij} \rangle = (j+1)a_j - (i+1)a_i$. D'où $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ (i+1)a_i = (j+1)a_j$. En particulier $\forall i \in \mathbb{N},\ a_i = \frac{a_0}{i+1}$. D'où $\forall i \in \mathbb{N},\ a_i = 0$. Doù P est le polynôme nul. Donc $F^{\perp} = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Par suite, $(F^{\perp})^{\perp} = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}^{\perp} = \mathbb{R}[X]$ est différent de F car $1 \notin F$ (car $f(1) = 1 \neq 0$).

Exercice 8. On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P(X) | Q(X) \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ et on définit la forme linéaire $h : E \to \mathbb{R},\ P(X) \mapsto P(0)$. On suppose qu'un polynôme $A(X)$ est tel que $h(P(X)) = \langle A(X) | P(X) \rangle$ pour tout $P(X) \in E$. Calculer $\langle A(X) | XA(X) \rangle$ et conclure.

On fait l'hypothèse qu'il existe un polynôme $A(X)$ tel que $P(0) = \langle A(X) | P(X) \rangle$ pour tout $P(X) \in E$.

D'une part, $\langle A(X) | XA(X) \rangle = \int_0^1 A(t)tA(t)\,dt = \int_0^1 tA^2(t)\,dt$ par définition du produit scalaire dont on a muni dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$.

D'autre part, $\langle A(X) | XA(X) \rangle = h(XA(X)) = 0A(0) = 0$ par hypothèse.

D'où $\int_0^1 tA^2(t)\,dt = 0$. Or la fonction $t \mapsto tA^2(t)$ est continue et positive sur $[0,1]$. Donc elle est nulle car d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Par suite, le polynôme $XA^2(X)$ a une infinité de racines (car tous les réels de $[0,1]$ le sont). Or le polynôme X n'est pas nul, donc c'est le polynôme $A(X)$ qui est nul. (Pour rappel, si le produit de deux polynômes est nul, alors au moins un des polynômes est nul, autrement dit : l'anneau $\mathbb{R}[X]$ est intègre.)

C'est absurde car $\langle A(X) | 1_{\mathbb{R}[X]} \rangle = 1_{\mathbb{R}} \neq 0$ par hypothèse. Donc il n'existe pas de polynôme $A(X)$ tel que $P(0) = \langle A(X) | P(X) \rangle$ pour tout $P(X) \in E$. On vient de prouver, par un contre-exemple, que le théorème de représentation de Riesz ▷ **VIII.29** n'est pas valable en dimension infinie.

Exercice 9. Soient E un espace euclidien, u et v deux vecteurs non nuls, et f l'endomorphisme défini par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle v | x \rangle\, u.$$

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, dans laquelle u et v sont représentés par les vecteurs colonnes U et V. Exprimer, grâce à ces vecteurs colonnes :
   — le produit scalaire $\langle u \mid v \rangle$;
   — la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme f.

2. Déterminer les noyau et image de f
3. On suppose que u n'est pas orthogonal à v. Montrer que les noyau et image de f sont supplémentaires et que f est diagonalisable. Quel est le spectre de f ?
4. On suppose que u est orthogonal à v. Déterminer $f \circ f$. Les noyau et image de f sont-ils supplémentaires ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

---

1. Notons la base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$:
$$\begin{array}{rcl} \langle u|v\rangle & = & \langle \sum_{i=1}^n u_i e_i | \sum_{j=1}^n v_j e_j\rangle \\ & = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \langle e_i|e_j\rangle \\ & = & \sum_{i=1}^n u_i v_i \\ & = & {}^tUV. \end{array}$$
Par suite, pour tout $x \in E$:
$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & ({}^tV \cdot X) \cdot U & \\ & = & U \cdot ({}^tV \cdot X) & \text{car } {}^tV \cdot X \text{ est une matrice } 1 \times 1 \text{ et commute donc avec } U \\ & = & (U \cdot {}^tV) \cdot X & \text{car la multiplication matricielle est associative.} \end{array}$$
La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc la matrice carrée $U \cdot^t V$.
2. Pour tout $x \in E$, $f(x) = \langle v|x\rangle u$ est colinéaire au vecteur u. Donc l'image de f est incluse dans $\mathrm{Vect}(u)$ et est donc égale à $\{0_E\}$ ou à $\mathrm{Vect}(u)$. Or $f(v) = \langle v|v\rangle u$ est non nul, donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(u)$.

   Si $x \in \mathrm{Ker}\, f$, alors $\langle v|x\rangle u = 0_E$. Or $u \neq 0_E$, d'où $\langle v|x\rangle = 0$, donc $\mathrm{Ker}\, f \subset (\mathrm{Vect}(v))^\perp$. Réciproquement, si x appartient à $(\mathrm{Vect}(v))^\perp$, alors $f(x) = 0_E$. Donc $(\mathrm{Vect}(v))^\perp = \mathrm{Ker}\, f$.
3. Si u n'est pas orthogonal à v, alors u n'appartient pas au noyau de f, d'où $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$ et, comme $\dim E = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f$ (théorème du rang), noyau et image sont supplémentaires.

   Le noyau de f est le *sep* associé à la valeur propre 0. En outre, u est un vecteur propre associé à la valeur propre $\langle v|u\rangle$ car $f(u) = \langle v|u\rangle u$ et $u \neq 0_E$. D'où une base adpatée à la somme directe $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f = E$ sera une base de E formée de vecteurs propres de f. Donc f est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(f) = \{\langle v|u\rangle; 0\}$.
4. Si u est orthogonal à v, alors
$$f \circ f(x) = u\langle v|u\langle v|x\rangle\rangle = u\langle v|u\rangle\langle v|x\rangle = 0$$
pour tout $x \in E$, donc $f \circ f = 0$. Noyau et image ne sont pas supplémentaires car u appartient à leur intersection.

   En outre, la seule valeur propre possible de f est 0 car 0 est la seule racine du polynôme X^2, annulateur de f. Si f était diagonalisable, alors ce serait l'endomorphisme nul. Or $f(v) = u\langle v|v\rangle \neq 0_E$. Donc f n'est pas diagonalisable.

Exercice 10 (La fonction zêta de Riemann est log-convexe)**.**

On rappelle que $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est défini pour tout $x > 1$.

On dit qu'une fonction f est **log-convexe** si la fonction f est strictement positive et si la fonction $\ln \circ f$ est convexe.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $x > 1$, $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$. Montrer que la fonction S_N est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$ et que
$$[S_N'(x)]^2 \leq S_N''(x) \cdot S_N(x)$$
pour tout $x > 1$.
2. En déduire que $[\zeta'(x)]^2 \leq \zeta''(x) \cdot \zeta(x)$ pour tout $x > 1$ ▷ **corollaire 19 du chapitre VII**.
3. Conclure que la fonction ζ est log-convexe.
4. Montrer que, si une fonction est log-convexe, alors elle est convexe.

---

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 1$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = \mathrm{e}^{-x \ln n}$. Chaque fonction f_n est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$ et, pour tout $x > 1$, $f_n'(x) = \dfrac{-\ln n}{n^x}$ et $f_n''(x) = \dfrac{(\ln n)^2}{n^x}$. Par suite, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la fonction S_N est deux fois dérivable et

$\left[S_N'(x)\right]^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-\ln n}{n^x}\right)^2 = \langle u, v\rangle^2$, où $\langle u, v\rangle$ est le produit scalaire usuel des deux vecteurs $u = \left(\frac{\ln 1}{1^{x/2}}, \cdots, \frac{\ln N}{N^{x/2}}\right)$ et $v\left(\frac{1}{1^{x/2}}, \cdots, \frac{1}{N^{x/2}}\right)$ de $\mathbb{R}^N$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$. Or $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{(\ln n)^2}{\left(n^{x/2}\right)^2} = S_N''(x)$ et $\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1^2}{\left(n^{x/2}\right)^2} = S_N(x)$. Donc $\left[S_N'(x)\right]^2 \leq S_N''(x) \cdot S_N(x)$ pour tout $x > 1$.

2. On a prouvé que $\left[\sum_{n=1}^{N} f_n'(x)\right]^2 \leq \sum_{n=1}^{N} f_n''(x) \cdot \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$. Il reste à prouver que :
   - les limites $\lim_{N\to\infty} S_N(x)$, $\lim_{N\to\infty} S_N'(x)$ et $\lim_{N\to\infty} S_N''(x)$ existent, cela permettra d'écrire
   $$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\right]^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) \cdot \zeta(x)$$
   car les inégalités larges passent à la limite $N \to \infty$;
   - on peut dériver terme à terme, cela permettra d'écrire $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \zeta'(x)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \zeta''(x)$.

   Pour ce faire, on utilise le ▷ **corollaire 19 du chapitre VII**. Soient $a > 1$ et $\epsilon > 0$ tel que $a - \varepsilon > 1$:

   $*$ Chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$.

   $**$ Les séries de fonctions $\sum f_n$ et $\sum f_n'$ convergent simplement sur $[a, +\infty[$ car, pour tout $x > a$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^a}$ et la série numérique $\sum \frac{1}{n^a}$ converge d'après la critère de Riemann. Et $\left|f_n'(x)\right| \leq \frac{\ln n}{n^a} \leq \frac{\ln n}{n^\varepsilon}\frac{1}{n^{a-\varepsilon}} = \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{a-\varepsilon}}\right)$, la suite $\frac{1}{n^{a-\varepsilon}}$ ne change pas de signe et la série numérique $\sum \frac{1}{n^{a-\varepsilon}}$ converge.

   $***$ La série de fonctions $\sum f_n''$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a, +\infty[$ car $\left|f_n''(x)\right| \leq \frac{(\ln n)^2}{n^x} \leq \frac{(\ln n)^2}{n^\varepsilon}\frac{1}{n^{a-\varepsilon}} = \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{a-\varepsilon}}\right)$.

   Donc la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$ et on peut dériver terme à terme. C'est vrai pour tout $a > 1$, donc sur $]1, +\infty[$. En conclusion, $[\zeta'(x)]^2 \leq \zeta''(x) \cdot \zeta(x)$ pour tout $x > 1$.

3. D'une part, la fonction ζ est strictement positive car $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geq 1$ pour tout $x > 1$. D'autre part, la fonction $\ln \circ \zeta$ est convexe car elle est deux fois dérivable (par composition) et sa dérivée seconde est positive. En effet, $\frac{d}{dx} \ln \circ\zeta(x) = \frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)}$, d'où $\frac{d^2}{dx^2} \ln \circ\zeta(x) = \frac{\zeta''(x)\zeta(x) - \zeta'(x)\zeta'(x)}{\zeta^2(x)} \geq 0$ pour tout $x > 1$, d'après la question précédente.

4. On suppose que la fonction f est log-convexe. Soient x et y deux réels appartenant à l'ensemble de définition de la fonction f. Soit $\lambda \in [0, 1]$. On veut montrer que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$:

   $\ln f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \ln f(x) + (1-\lambda)\ln f(y)$ car f est log-convexe.

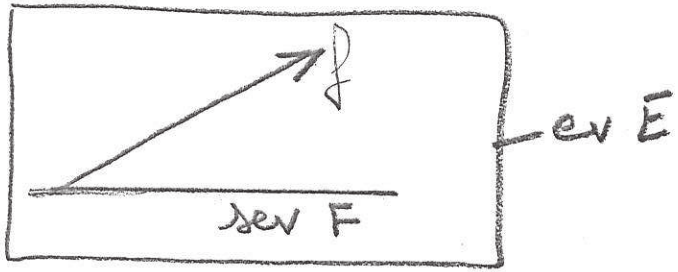
   D'où $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \exp\left[\lambda \ln f(x) + (1-\lambda)\ln f(y)\right]$ par croissance de la fonction exp.

   Enfin, la fonction exp est convexe, d'où $\exp\left[\lambda \ln f(x) + (1-\lambda)\ln f(y)\right] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

   D'où $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

   Donc la fonction f est convexe.

Exercice 5



* Soient l'ev $E = C([-\pi, +\pi], \mathbb{R})$ et le produit scalaire

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) g(t)\, dt.$$

Soient $f(t) = t$ et $g(t) = a \sin t + b \cos t$

Alors $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} (t - a \sin t - b \cos t)^2 dt = \|f - g\|^2$

Quand a et b varient, la fonction g parcourt le sev $F = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$

** Le sev F est de dimension finie ($\dim F = 2$), d'où (théorème des moindres carrés) :

$\exists!\, g \in F$, $\|f - g\|$ est minimal.

et g est le projeté orthogonal de f sur le sev F : $g = p(f)$

base $(\sin, \cos) \xrightarrow{\text{SCHMIDT}}$ b.o.n. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

$$p(f) = \langle \varepsilon_1 | f \rangle \varepsilon_1 + \langle \varepsilon_2 | f \rangle \varepsilon_2$$

*** Calculs (algo. de Schmidt) :

/.../ $\quad \varepsilon_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(t)$

$\varepsilon_2(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(t)$

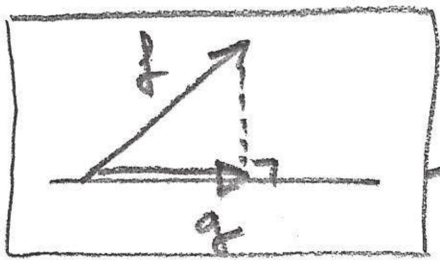
$$\langle \varepsilon_1 | f \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}} \cdot t \, dt = 2\sqrt{\pi}$$

$$\langle \varepsilon_2 | f \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}} \cdot t \, dt = 0$$

D'où : $\forall t \in [-\pi, +\pi]$,

$$g(t) = 2\sqrt{\pi}\, \varepsilon_1(t) + 0\, \varepsilon_2(t)$$
$$= 2 \sin(t)$$

****



ev E

D'après le théorème de Pythagore,

$$\|f-g\|^2 = \|f\|^2 - \|g\|^2$$

$$\|f\|^2 = \langle f | f \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} t \cdot t \, dt = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\|g\|^2 = \|2\sqrt{\pi}\, \varepsilon_1\|^2 = 4\pi \|\varepsilon_1\|^2 = 4\pi$$

Donc

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{+\pi} (t - a \sin t - b \cos t)^2 \, dt = \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi$$